Sistemas Lineales 1

Apuntes

Elaborado por :

Ing. Melchor Díaz Arellano

Revisado por :

Ing. Jesús Torrecillas Hernández
Ing. José Alfredo Serrano Salazar

Contenido

Unidad		Pagina
1.	**Introducción**.	3
	1.1. Conceptos básicos.	3
	1.2. Modelos matemáticos de sistemas físicos.	9
	1.3. Función de transferencia.	9
2.	**Simplificación de diagramas de bloques.**	29
	2.1. Diagramas y álgebra de bloques.	29
	2.2. Gráficos de flujo de señal.	36
3.	**Acciones Básicas de Control**.	45
	3.1. Controladores automáticos.	45
	3.2. Criterio de estabilidad de Routh.	57
	3.3. Selección de un controlador.	59
4.	**Análisis de Respuesta Transitoria**.	69
	4.1. Sistemas de primer orden.	69
	4.2. Sistemas de segundo orden.	74
5.	**Análisis del Lugar de las Raíces.**	93
	5.1. Condiciones del Lugar de las raíces.	93
	5.2. Reglas de construcción del Lugar Geométrico de las raíces.	98
	5.3. Ejemplos.	99
	5.4. Error en Estado Estacionario.	110
	5.5. Introducción a la Optimización de Sistemas.	116
	5.6. Optimización Paramétrica de Sistemas de Control.	130
	5.7. Análisis de Sistemas de Control.	141

Unidad 1
Introducción.

1.1 Conceptos básicos.

Definiciones

Planta: Cualquier objeto físico que ha de ser controlado. (Horno de calentamiento, Reactor químico, Motor, Vehículo espacial, etc.)

Proceso: Cualquier operación que se vaya a controlar. (Químicos, Eléctricos, Mecánicos, etc.)

Sistema: Es una combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen determinado objetivo.

Perturbación: Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema.

Sistema de control realimentado : Es aquel que tiende a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia como parámetro de control.

Servomecanismo : Es un sistema de control realimentado en el que la salida es alguna posición, velocidad ó aceleración mecánica.

Sistema de regulación automática : Es un sistema de control realimentado en el que la entrada de referencia o la salida deseada son constantes o varían lentamente en el tiempo, y donde la tarea fundamental consiste en mantener la salida en el valor deseado a pesar de las perturbaciones presentes.

Sistema de control de procesos : Es un sistema de regulación automática en el que la salida es una variable como temperatura, presión, flujo, nivel de liquido o ph.

Sistema de control de lazo cerrado : Es aquel en el que la señal de salida tiene efecto directo sobre la acción de control.

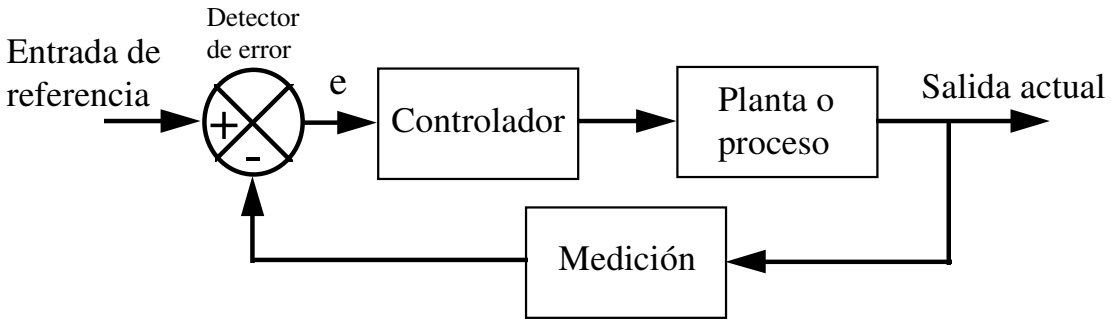


Fig.1.1. Sistema de control de lazo cerrado.

La fig.1.1. muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de lazo cerrado, en el cual se puede observar que la salida del sistema es realimentada a un detector de error, en el que se compara la señal de salida con la entrada de referencia. El resultado de esta comparación es la señal de error **e** que actúa directamente sobre el controlador, el cual se encargará de corregir las perturbaciones que se presenten al sistema.

En la fig.1.2. se ilustra un sistema de control automático de lazo cerrado de temperatura. En este sistema la variable a controlar es la temperatura del agua (esto se deduce observando cual es el elemento de medición), donde la acción de control consiste en regular la entrada de vapor por medio de una válvula. El vapor pasa a través de un serpentín que calienta el agua del tanque, utilizando un agitador para homogeneizar la temperatura en el interior. El dial del control automático proporciona la referencia de temperatura que es comparada con la señal de medición, el resultado de esta comparación (señal de error) es amplificada y la salida del controlador se envia a la válvula de control para modificar la apertura de la válvula de provisión de vapor para corregir la temperatura que toma el agua. Si no hay error, no se modifica la apertura de la válvula.

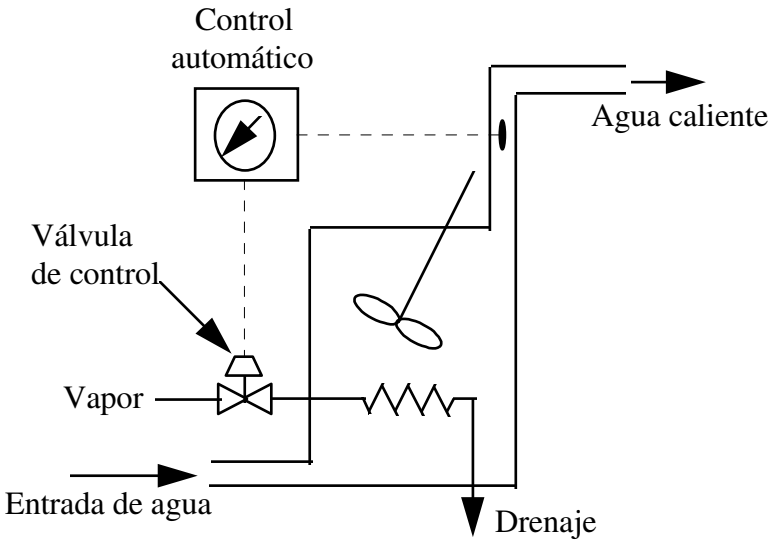


Fig.1.2. Sistema de control automático de lazo cerrado de temperatura.

La Fig.1.3. muestra el diagrama de bloques del sistema anterior, en el se puede apreciar la secuencia que guarda con respecto al sistema físico.

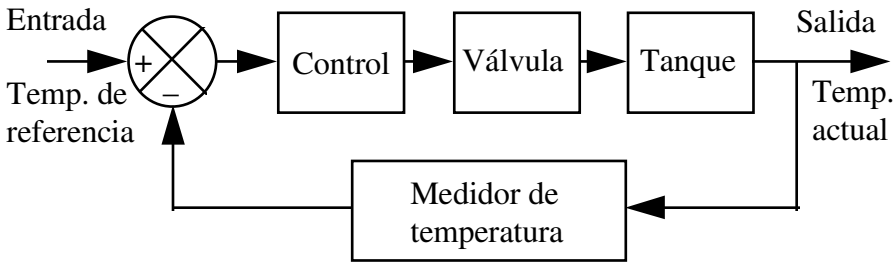


Fig.1.3. Diagrama de bloques del sistema de control de temperatura.

La Fig.1.4. muestra el diagrama de bloques de otro sistema de lazo cerrado cuya función consiste en posicionar una carga. En este caso se emplean un par de potenciómetros para detectar el error entre la posición real de la carga (salida) y la posición deseada (entrada de referencia). La tensión de error e(t) que aparece en terminales del potenciómetro se amplifica y se aplica al motor para que éste gire en un sentido tal que tienda a eliminar la señal de error. Si se somete el eje de entrada (referencia) a un desplazamiento angular brusco de R unidades, el sistema presentará una respuesta temporal la cual se muestra en la Fig.1.5. El sistema tendrá una respuesta similar al de la Fig.1.5, si aparece una perturbación en el eje de salida.

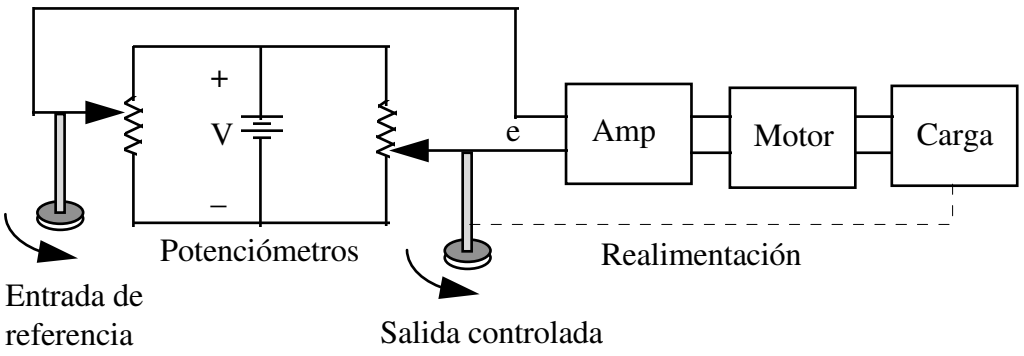


Fig.1.4. Sistema de control de lazo cerrado de posición.

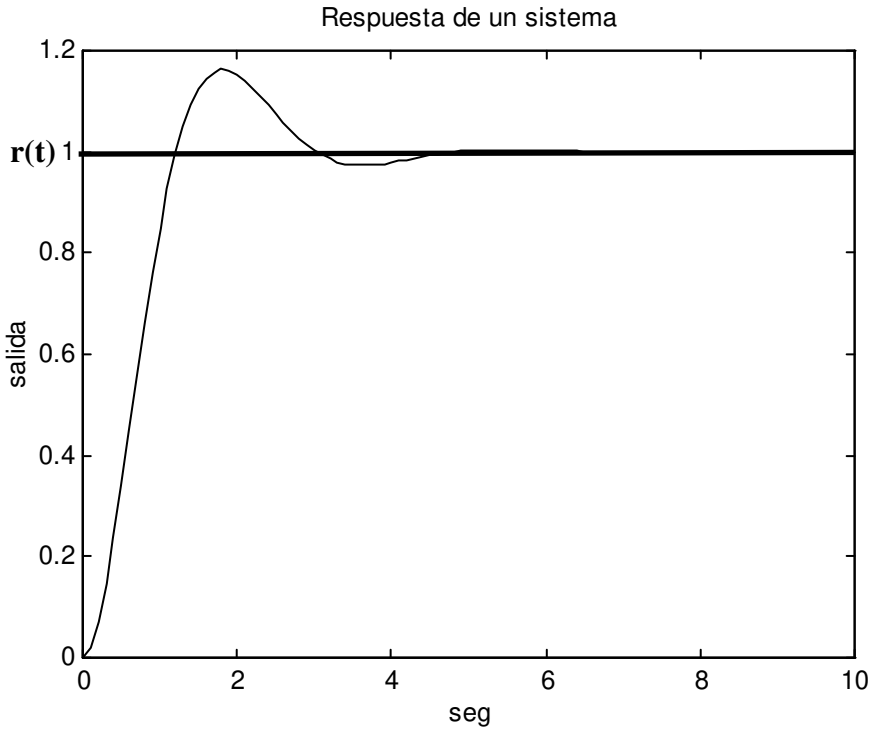


Fig.1.5. Respuesta típica de un servomecanismo a una entrada escalón.

El diagrama de bloques de la Fig.1.6. representa esquemáticamente los elementos más característicos de un servosistema.

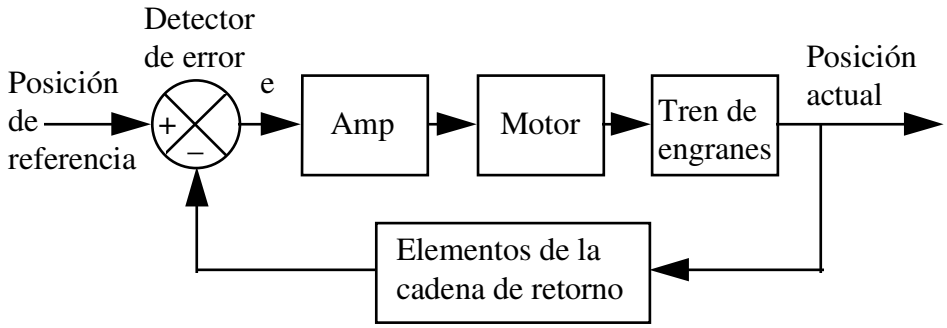
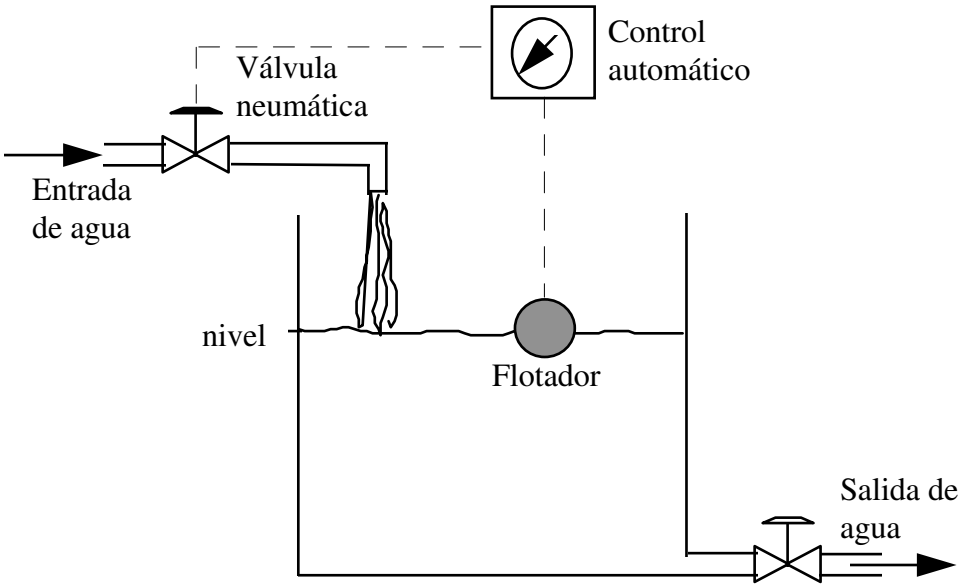


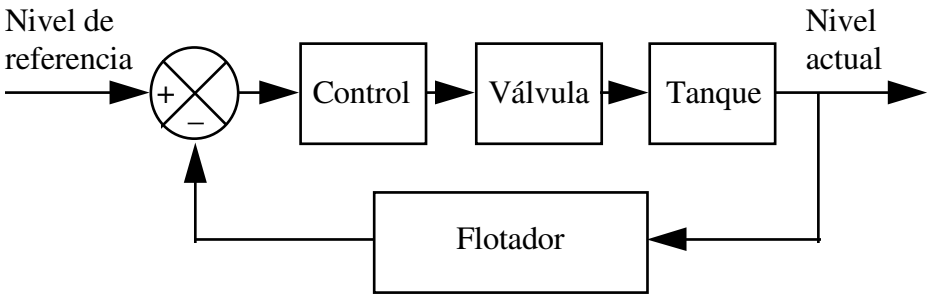
Fig.1.6. Diagrama de bloques de un servosistema.

La Fig.1.7a. es el diagrama esquemático de un sistema de control de nivel de líquido . Aquí el control automático mantiene el nivel del líquido comparando el nivel efectivo con el deseado, y corrigiendo cualquier error por medio del ajuste de la

apertura de la válvula neumática. La Fig.1.7b. muestra el diagrama de bloques del sistema de control.



a)



b)

Fig.1.7. a) Sistema de control de nivel de líquido. b) Diagrama de bloques.

Sistema de control de lazo abierto : Los sistemas de control de lazo abierto son sistemas de control en los que la salida no tiene efecto sobre la acción de control. Es decir, en un sistema de control de lazo abierto la salida ni se mide ni se realimenta para compararla con la entrada. La Fig.1.8. muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de lazo abierto. Un ejemplo práctico es una lavadora automática. El

remojo, el lavado y enjuague en la lavadora se cumplen sobre una base de tiempos. La máquina no mide la señal de salida, es decir, la limpieza de la ropa.

En un sistema de control de lazo abierto cualquiera, no se compara la salida con la entrada de referencia. Por lo tanto, para cada entrada de referencia corresponde una condición de operación fija. Así la exactitud del sistema depende de la calibración.

En la práctica, solo se puede usar el control de lazo abierto si la relación entre la entrada y la salida es conocida y si no hay perturbaciones ni internas ni externas. Todo sistema de control que funciona sobre una base de tiempos es de lazo abierto.

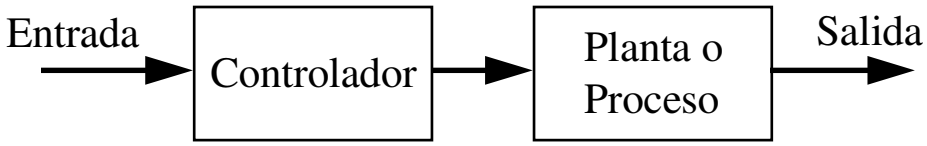


Fig.1.8. Sistema de control de lazo abierto.

Ejercicios de tarea.

1.- Definir :
a) Sistema de control directo e indirecto. b) Sistemas de control adaptados.
c) Sistemas de control con aprendizaje.

2.- Hacer una representación física y en diagrama de bloques de los siguientes sistemas de control automáticos de lazo cerrado y explicar su funcionamiento :
a) Sistema de control de iluminación de una habitación.
b) Tostador de pan automático de lazo cerrado.
c) Sistema de control de velocidad.
d) Sistema de control de brazo de robot.
e) Sistema de control de seguimiento de un misil a un blanco fijo.

3.- Para los sistemas de control anteriores, cual sería una señal de perturbación.

4.- Citar cuatro ejemplos de sistemas de control de lazo abierto.

5.- Cuales son las características más importantes de los sistemas de control de lazo abierto y de lazo cerrado.

1.2. Modelos Matemáticos de Sistemas Físicos.

Modelos matemáticos.

La descripción matemática de las características dinámicas de un sistema se denomina modelo matemático.

Sistemas lineales.

Los sistemas lineales son aquellos en que las ecuaciones del modelo son lineales. Una ecuación diferencial es lineal si los coeficientes son constantes o funciones únicamente de la variable independiente. La propiedad más importante de los sistemas lineales es que se les puede aplicar el principio de superposición.

Función de transferencia.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo esta definida como la relación de la transformada de Laplace de la salida (función respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada (función excitadora) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. La función de transferencia es una expresión que relaciona la salida y la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo, en término de los parámetros del sistema y es una propiedad del sistema en sí, independiente de la función de entrada o excitadora.

Sea el sistema lineal invariante en el tiempo definido por la siguiente ecuación diferencial :

$$a_o \frac{d^n y}{dt} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_o \frac{d^m x}{dt} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt} + ... + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x$$

(n ≥ m)

Función de transferencia = $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n}$;

donde : X(s) = entrada y Y(s) = salida

La representación en diagrama de bloques se muestra en la Fig.1.9.

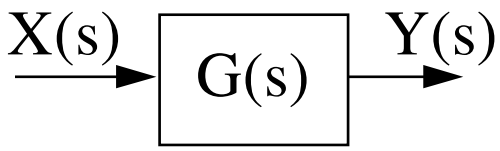


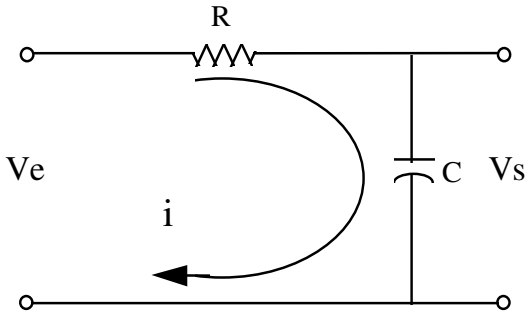
Fig.1.9. Función de transferencia.

Pasos para obtener funciones de transferencia.

1.- Plantear la ecuación diferencial del sistema.
2.- Obtener la transformada de Laplace de la ecuación diferencial suponiendo todas las condiciones iniciales iguales a cero.
3.- Encontrar la relación de la salida Y(s) respecto a la entrada X(s). Esta relación es la función de transferencia.

Funciones de transferencia de circuitos eléctricos

Circuito RC



$$v_e = Ri + \frac{1}{C}\int idt$$

$$v_s = \frac{1}{C}\int idt$$

$$V_e(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$V_s(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{I(s)\frac{1}{Cs}}{I(s)\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

La representación matemática de una función de transferencia de primer orden se puede realizar de dos formas :

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{\tau s+1}$$

En función de la constante de tiempo τ

$\tau = RC$

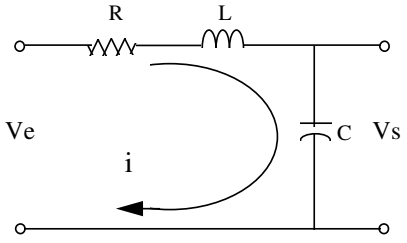
ó

En función de la frecuencia ω

$\omega = 1/RC$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}} = \frac{\omega}{s+\omega}$$

Circuito RLC



$$v_e = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

$$v_s = \frac{1}{C}\int idt$$

$$V_e(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$V_s(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}I(s)}{\left(R+Ls+\frac{1}{Cs}\right)I(s)}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{LCs^2+RCs+1} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

La representación matemática de una función de transferencia de segundo orden se puede realizar de dos formas :

En función de la constante de tiempo $\underline{\tau}$

ó

en función de la frecuencia $\underline{\omega}$.

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{\tau_1 s^2+\tau_2 s+1}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

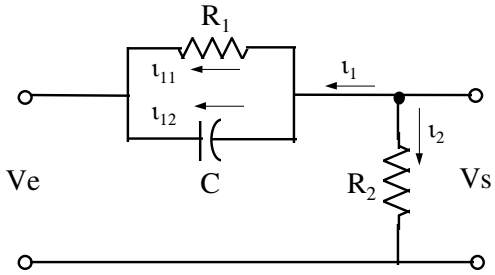
Donde :

ω_n = frecuencia natural no amortiguada.

ζ = coeficiente de amortiguamiento.

Ejemplo.

Para el siguiente circuito eléctrico obtener la función de transferencia expresada en función: a) de la constante de tiempo. b) de la frecuencia.



a) Las constantes de tiempo son:
$\tau_1 = R_1C$ y $\tau_2 = R_1R_2C/(R_1 + R_2)$.

b) Las frecuencias del circuito son:
$\omega_1 = 1/R_1C$ y $\omega_2 = (R_1 + R_2)/R_1R_2C$

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$i_{11} + i_{12} + i_2 = 0$$

$$C\frac{dv_s}{dt} - C\frac{dv_e}{dt} + \frac{v_s}{R_1} - \frac{v_e}{R_1} + \frac{v_s}{R_2} = 0$$

$$CsV_s(s) - CsV_e(s) + \frac{V_s(s)}{R_1} - \frac{V_e(s)}{R_1} + \frac{V_s(s)}{R_2} = 0$$

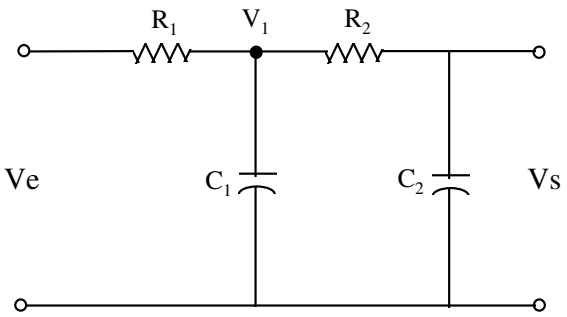
$$V_s(s)\left(Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_e(s)\left(Cs + \frac{1}{R_1}\right) = 0$$

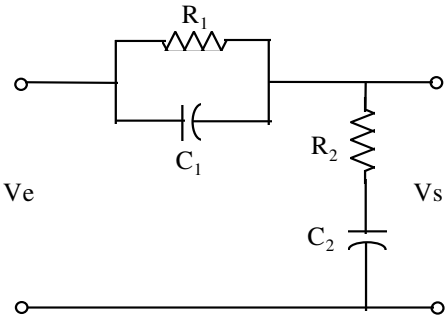
$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\frac{R_1Cs+1}{R_1}}{\frac{R_1R_2Cs + R_2 + R_1}{R_1R_2}} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\left(\frac{R_1Cs+1}{\frac{R_1R_2Cs}{R_1 + R_2} + 1}\right)$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\left(\frac{R_1Cs+1}{\frac{R_1R_2Cs}{R_1 + R_2} + 1}\right)$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{s + \frac{1}{R_1C}}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}}$$

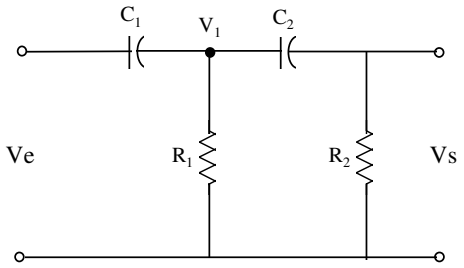
Ejercicios para realizar en clase.





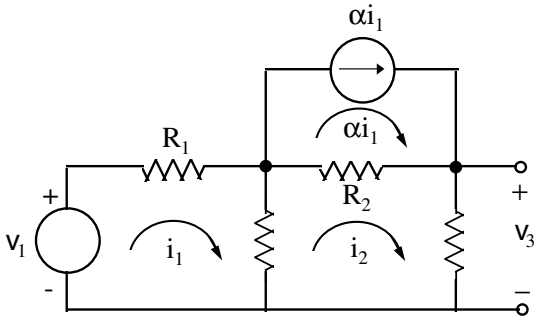
Ejercicios de tarea.

1.- Obtener la función de transferencia $V_s(s)/V_e(s)$ del siguiente circuito :



2.- Obtener la función de transferencia

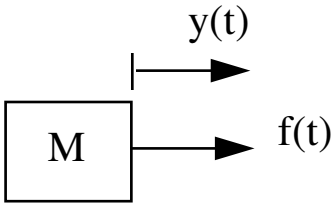
$V_3(s)/V_1(s)$ del siguiente circuito.



Sistemas Mecánicos.

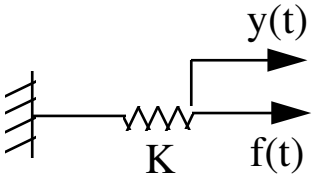
Movimiento de traslación.

Masa.



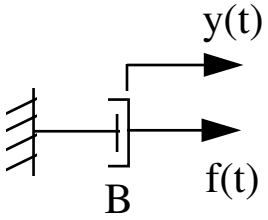
$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

Muelle ó resorte lineal.



$$f(t) = \mathrm{K}\, y(t)$$

Rozamiento (coeficiente de fricción viscosa).



$$f(t) = \beta \frac{dy(t)}{dt}$$

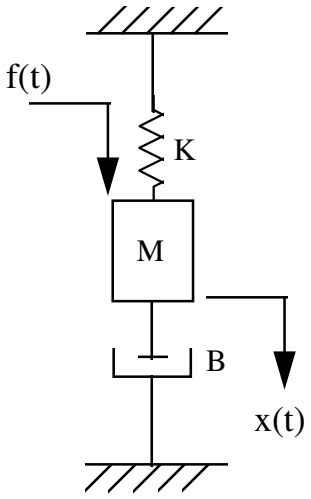
La ley fundamental que gobierna los sistemas mecánicos, es la ley de Newton. Para sistemas traslacionales la ley establece que :

$$Ma = \Sigma F$$

donde :

M = masa en slug
a = aceleración en pie/seg^2
F = fuerza en libras

Sistema Mecánico Traslacional



$$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$$

$$F(s) = Ms^2X(s) + \beta sX(s) + KX(s)$$

$$F(s) = X(s)\left(Ms^2 + \beta s + K\right)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + \beta s + K}$$

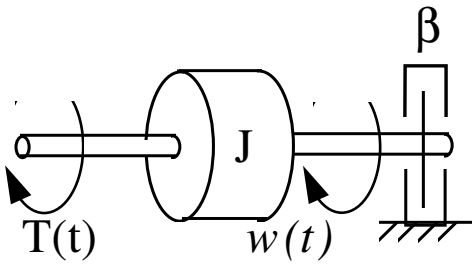
Sistema Mecánico Rotacional

Para sistemas mecánicos de rotación la ley de Newton establece que :

$$J\alpha = \Sigma T$$

donde :

J = momento de inercia, en slug-pie^2
α = aceleración angular en rad/seg.
T = par en libra-pie



$$T(t) = J\frac{d\omega}{dt} + \beta\omega$$

$$T(s) = JsW(s) + \beta W(s)$$

$$T(s) = W(s)\left(Js + \beta\right)$$

$$\frac{W(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + \beta}$$

J = momento de inercia de la carga en slug-pie^2
β = coeficiente de fricción viscosa en libras-pie/rad/seg.
ω = velocidad angular en rad/seg.
T = par aplicado al sistema en libra-pie

Para obtener el momento de inercia en libra-pie^2 , se multiplica la cantidad de slug-pie^2 por 32. Inversamente para obtener el momento de inercia en slug-pie^2 , debe multiplicarse la cantidad de libra-pie^2 por 3.1×10^{-2} . La relación entre slug-pie^2 y gm-cm^2 está dada por :

$$1 \text{ slug-pie}^2 = 13.56 \times 10^6 \text{ gm-cm}^2$$

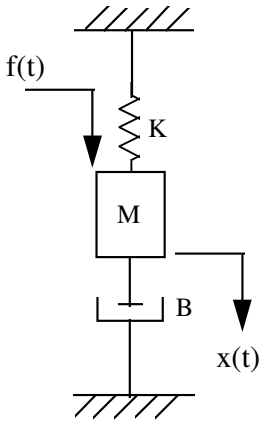
En la siguiente tabla se indican las unidades equivalentes de masa, momento de inercia y par.

Masa	Momento de inercia	Par
slug	slug	libra-pie
gramo	gm-cm^2	dina-cm
kilogramo	kg-m^2	newton-m

Analogías

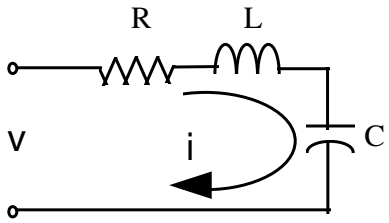
Analogía fuerza-tensión.

En la Fig.1.10 se muestra dos sistemas análogos y sus respectivas ecuaciones diferenciales.



$$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$$

a)



$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C}$$

$$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

b)

Fig.1.10. a) Sistema mecánico. b) Sistema análogo eléctrico.

Como se puede observar en la Fig.1.10 a y b, las ecuaciones de ambos sistemas son similares, teniendo como única diferencia el tipo de parámetros que se manejan en estos sistemas. Tales sistemas se denominan sistemas análogos.

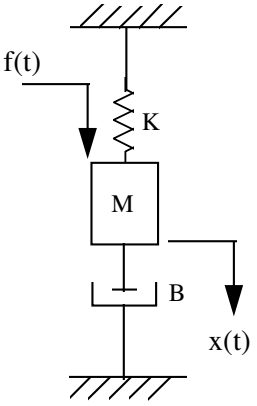
En la siguiente tabla se listan las magnitudes análogas.

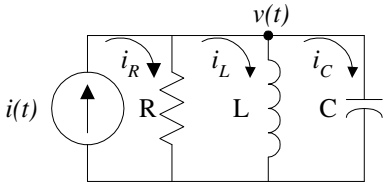
Analogía fuerza-tensión

Sistema Mecánico	Sistema Eléctrico
fuerza f (par T)	tensíon v
masa M (momento de inercia J)	inductancia L
coeficiente de fricción viscosa β	resistencia R
constante de resorte K	recíproca de la capacitancia 1/C
desplazamiento x (desplazamiento angular θ)	carga q
velocidad dx/dt , n (velocidad angular $d\theta/dt$)	corriente i

Analogía fuerza-corriente.

Otra analogía entre los sistemas mecánicos y eléctricos es la basada en la analogía fuerza corriente. La Fig.1.11 muestra dos sistemas análogos así como sus ecuaciones diferenciales.





$$i(t) = i_R + i_L + i_C$$

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v(t)dt + C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}\frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{\psi(t)}{L} + C\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$$

$$f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \beta\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)$$

$$i(t) = C\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{\psi(t)}{L}$$

a) b)

Fig.1.11. a) Sistema mecánico b) Sistema eléctrico

Comparando las ecuaciones de los sistemas de la Fig.1.11. se puede observar que son análogas.

Las magnitudes análogas se muestran en la siguiente tabla :

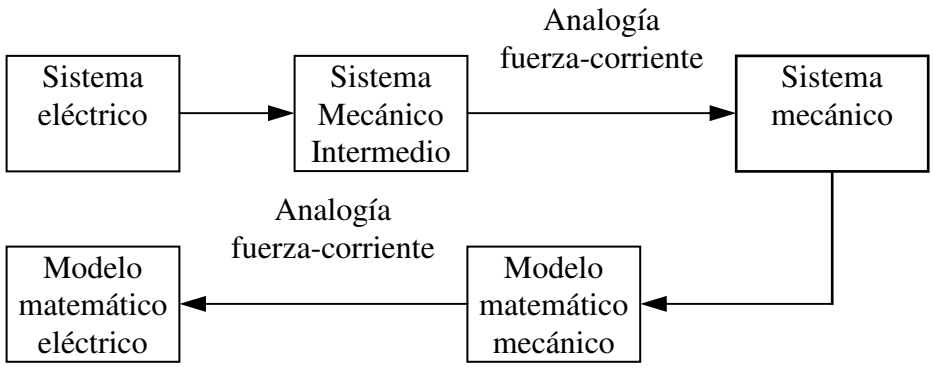
Analogía fuerza - corriente

Sistema Mecánico	Sistema Eléctrico
fuerza f (par T)	corriente *i*
masa M (inercia J)	capacitancia C
coeficiente de fricción viscosa β	recíproca de resistencia 1/ R
constante de resorte K	recíproca de inductancia 1/ L
desplazamiento *x* (desplazamiento angular θ)	enlace de flujo magnético ψ
velocidad *dx/dt* (velocidad angular ω)	tensión *v*

Sistema Mecánico Intermedio

Debido a que la mayoría de los sistemas de control tienen componentes tanto eléctricos como mecánicos, es necesario conocer el desarrollo matemático de ambos sistemas. Pero como en la mayoría de los casos el diseñador de un sistema de control ó es un ingeniero mecánico ó es eléctrico, este hecho nos lleva a pensar que el análisis matemático sería más sencillo si se realiza con modelos matemáticos puramente mecánicos ó eléctricos.

El sistema mecánico intermedio (S.M.I.) es una alternativa de trabajar los sistemas eléctricos como si fueran mecánicos , y los sistemas mecánicos como eléctricos. El S.M.I. esta basado en la analogía fuerza-corriente y es el paso intermedio en las conversiones de mecánico a eléctrico y de eléctrico a mecánico. En el siguiente diagrama de bloques se muestra como se realizan las conversiones :



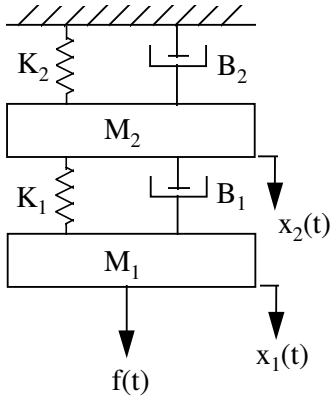
Pasos para construir el Sistema Mecánico Intermedio.

1.- El S.M.I. comienza donde aparece la fuente de alimentación. (fuente de corriente ó fuerza).
2.- Todas las masas (estén en la posición que estén) en el S.M.I. van conectadas a tierra.
3.- Los achurados de los sistemas mecánicos equivalen a la tierra del S.M.I.

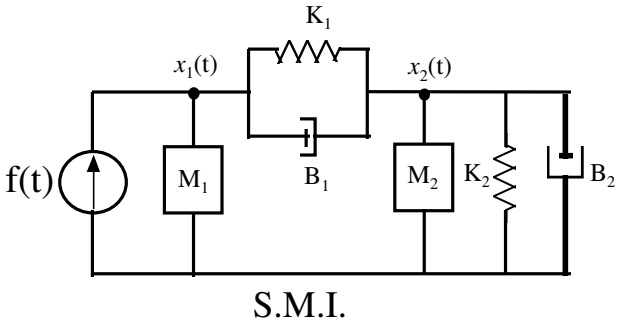
El S.M.I. es la representación de un sistema mecánico en forma de circuito eléctrico pero con componentes mecánicos.

Ejemplos :

I.- Obtener las ecuaciones diferenciales del siguiente sistema mecánico.



1

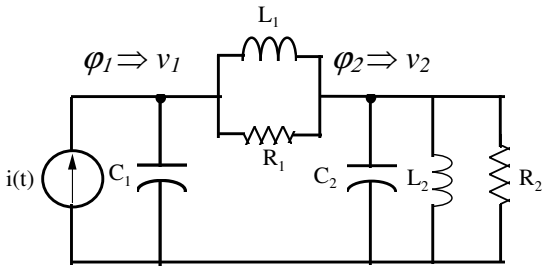


S.M.I.

Analogía fuerza-corriente

2

1.- Se transforma el sistema mecánico original al S.M.I.
2.- Del S.M.I. se pasa al circuito análogo eléctrico por medio de la analogía fuerza corriente.
3.- Se obtienen el modelo matemático del circuito análogo eléctrico.
4.- Utilizando nuevamente la analogía fuerza-corriente, se transforma el modelo matemático eléctrico a mecánico.



3 Ecuaciones diferenciales del sistema análogo eléctrico.

$$i(t) = C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{1}{L_1}\int v_1 dt - \frac{v_2}{R_1} - \frac{1}{L_1}\int v_2 dt$$

$$0 = \frac{1}{L_1}\int v_2 dt - \frac{1}{L_1}\int v_1 dt + \frac{v_2}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} + C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L_2}\int v_2 dt + \frac{v_2}{R_2}$$

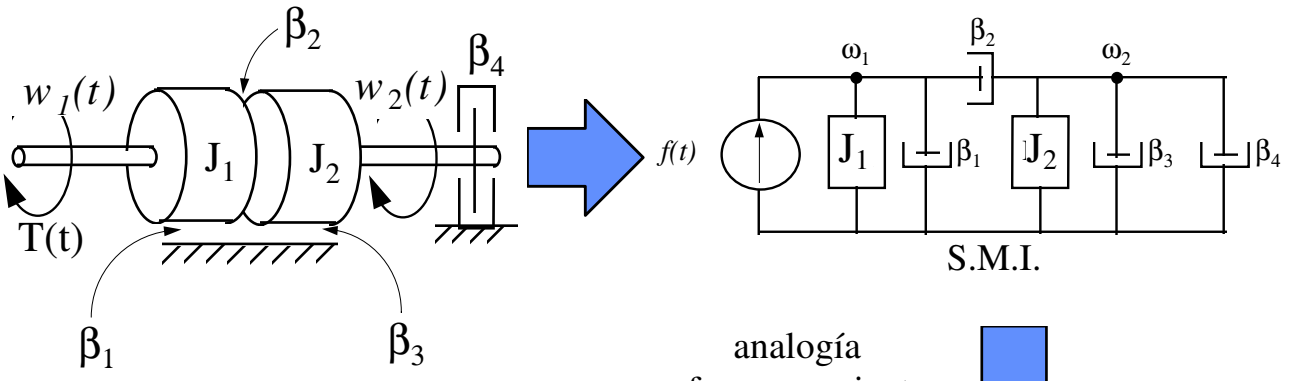
Utilizando analogía fuerza-corriente y $v = d\varphi/dt$

4 Se obtiene el modelo matemático del sistema mecánico.

$$f(t) = M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{dx_1}{dt} + K_1 x_1 - \beta_1 \frac{dx_2}{dt} - K_1 x_2$$

$$0 = K_1 x_2 - K_1 x_1 + \beta_1 \frac{dx_2}{dt} - \beta_1 \frac{dx_1}{dt} + M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + K_2 x_2 + \beta_2 \frac{dx_2}{dt}$$

II.- Obtener el modelo matemático del siguiente sistema mecánico rotacional.



$$i(t) = C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1}{R_2} - \frac{v_2}{R_2}$$

$$0 = \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_1}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_3} + \frac{v_2}{R_4}$$

Utilizando la analogía fuerza-corriente, se obtienen las ecuaciones diferenciales del sistema mecánico.

$$T(t) = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_1 - \beta_2\omega_2$$

$$0 = \beta_2\omega_2 - \beta_2\omega_1 + J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \beta_3\omega_2 + \beta_4\omega_2$$

Trenes de engranajes.

Los trenes de engrane se utilizan frecuentemente en los sistemas mecánicos para reducir la velocidad, amplificar el par o para obtener una transferencia de potencia más eficiente. La Fig. 1.12. muestra dos engranajes acoplados entre sí. El engrane con $\mathbf{N_1}$ dientes se llama *engranaje primario*, y el engranaje con $\mathbf{N_2}$ dientes se llama *engranaje secundario.*

La relación entre el par **T**, el desplazamiento angular θ, y el numero de dientes **N**, de un tren de engranajes se deduce de los siguientes hechos:

(1) El número de dientes de los engranajes es proporcional al radio de los mismos, es decir :

$\mathbf{r_1 N_2 = r_2 N_1}$ (r = radio del engrane).

(2) La distancia lineal recorrida a lo largo de la superficie periférica de cada engranaje es la misma; por tanto, $\theta_1 \mathbf{r_1} = \theta_2 \mathbf{r_2}$.

(3) El trabajo realizado por un engranaje es igual al trabajo realizado por el otro; $\mathbf{T_1}\ \theta_1 = \mathbf{T_2}\ \theta_2$.

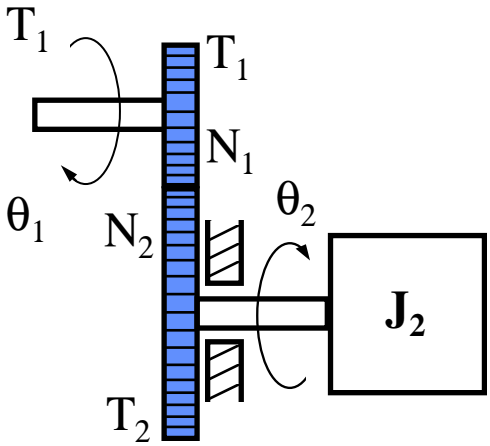
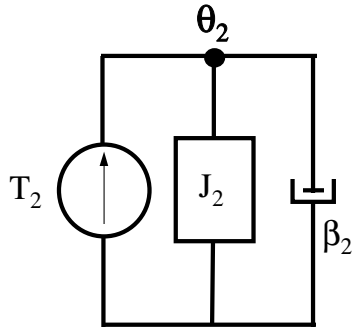


Fig. 1.12. Sistema de tren de engranajes

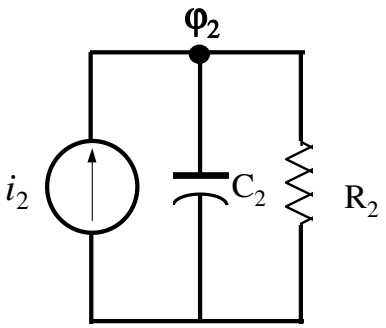
De las relaciones expuestas, se deduce

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (1.1)$$

Refiriéndonos a la Fig.1.12., la ecuación del par para el lado secundario del tren de engranajes es :



S.M.I



Análogo Eléctrico

$$i_2 = C_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + R_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$$

$$T_2 = J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \beta_2 \frac{d\theta_2}{dt} \quad (1.2)$$

donde T_2 es el par desarrollado en el engranaje secundario.

Usando la ecuación (1.1) y sustituyendola en la Ec. (1.2) , resulta

$$T_1 = J_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \beta_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{d\theta_1}{dt} \quad (1.3)$$

que es el modelo matemático del sistema referido al primario.

La Ec. (1.3) indica claramente que el sistema original puede representarse por el equivalente de la Fig. 1.13. cuya ecuación viene dada por

$$T_1 = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d\theta_1}{dt}$$

donde $$J_1 = J_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

y $$\beta_1 = \beta_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

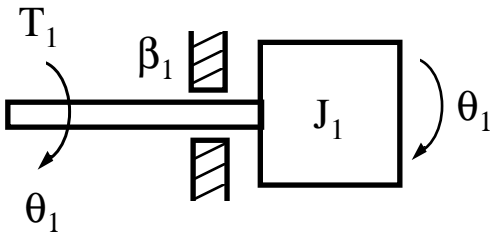


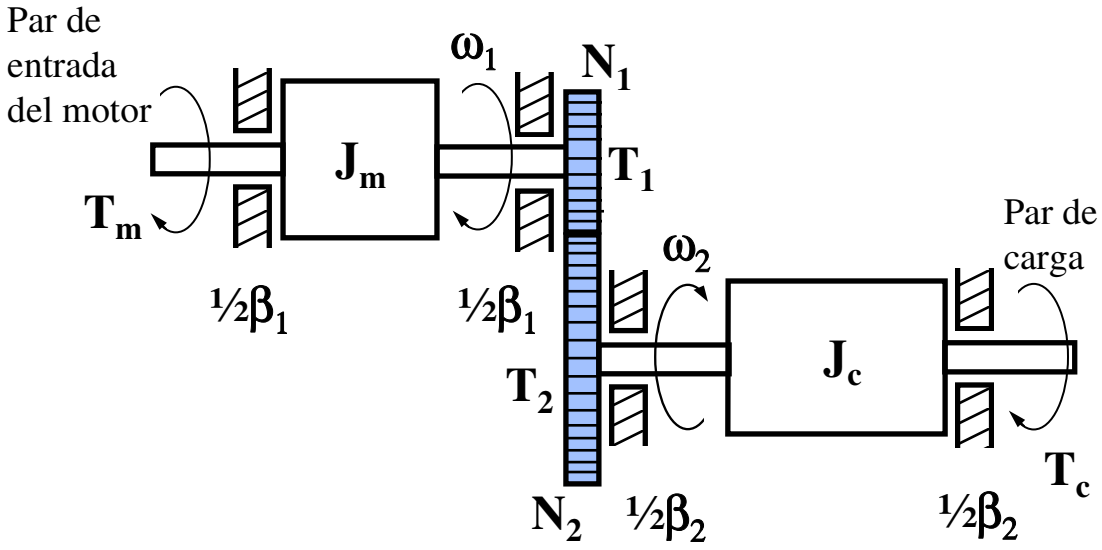
Fig.1.13. Sistema equivalente de la Fig.1.12.

se consideran la inercia y el rozamiento equivalentes referidos al eje primario.

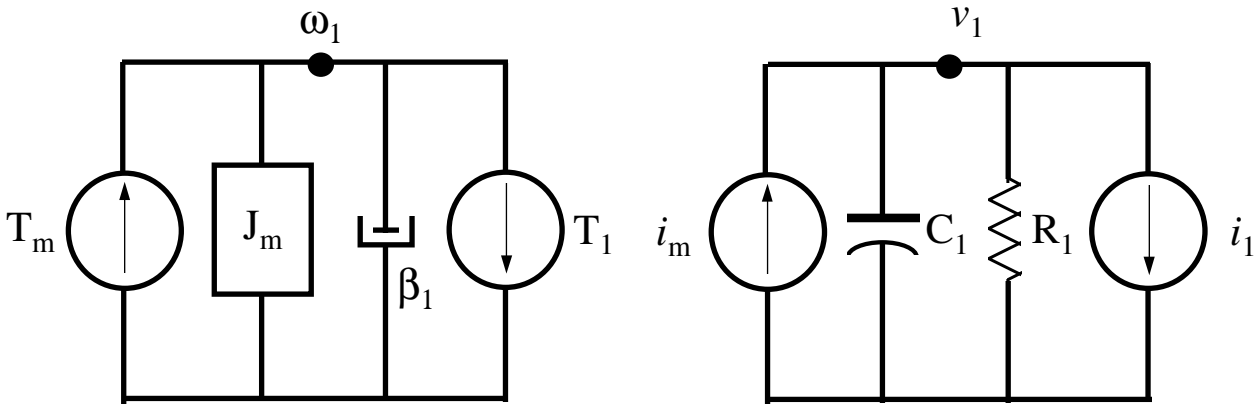
Ejemplo.

En el siguiente sistema de control se impulsa una carga mediante un motor a través de un tren de engranes. Suponiendo que la rigidez de las flechas del tren de engranes es infinita, que no hay juego ni deformación elástica, y que el número de

dientes de cada engrane es proporcional al radio del engrane. Encuéntrese la inercia equivalente y la fricción equivalente referidas a la flecha del motor y también las correspondientes referidas a la flecha de la carga.



Para la flecha del motor;

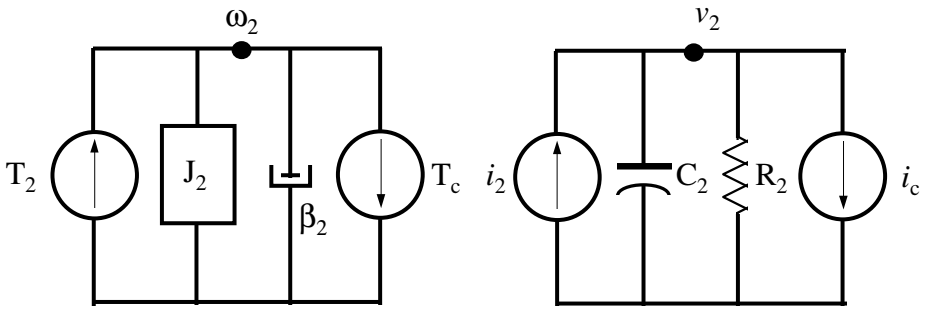


$$i_m = C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + i_1$$

$$T_m = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \beta_1 \omega_1 + T_1$$

donde T_m es el par desarrollado por el motor y T_1 es el par de la carga en el engrane 1 debida al resto del tren de engranes.

Para la flecha de la carga



$$i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_2} + i_C$$

$$T_2 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \beta_2 \omega_2 + T_C$$

donde T_2 es el par transmitido al engrane 2 y T_1 es el par de la carga . Puesto que el trabajo hecho por el engrane 1 es igual al del engrane 2,

$$T_1 \, \omega_1 = T_2 \, \omega_2$$

o bien

$$T_1 = T_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = T_2 \frac{N_1}{N_2}$$

por lo tanto

$$T_m = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \beta_1 \omega_1 + T_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)$$

$$T_m = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \beta_1 \omega_1 + \frac{N_1}{N_2} \left(J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \beta_2 \omega_2 + T_c \right)$$

Puesto que ; $\omega_2 = (N_1/N_2)\omega_1$

$$T_m = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + J_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \frac{d\omega_1}{dt} + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \omega_1 + T_c \left(\frac{N_1}{N_2} \right) \qquad (1.4)$$

Otra forma de obtener las ecuaciones del sistema es utilizar equivalencias. La inercia equivalente y el coeficiente de fricción viscosa del tren de engranes referidos a la flecha 1 están dados por :

$$J_{1e} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2; \quad \beta_{1e} = \beta_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \beta_2$$

En términos de la inercia equivalente J_{1e} y el coeficiente de fricción viscosa β_{1e} la Ec.1.4 se puede simplificar para dar

$$T_m = J_{1e}\frac{d\omega_1}{dt} + \beta_{1e}\omega_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)T_C$$

La inercia equivalente y el coeficiente de fricción viscosa equivalente del tren de engranes referidos a la flecha 2 son

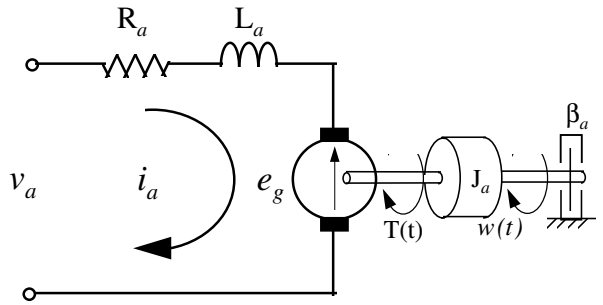
$$J_{2e} = J_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 J_1; \quad \beta_{2e} = \beta_2 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \beta_1$$

Y las relaciones entre J_{1e} y J_{2e} , β_{1e} y β_{2e} son

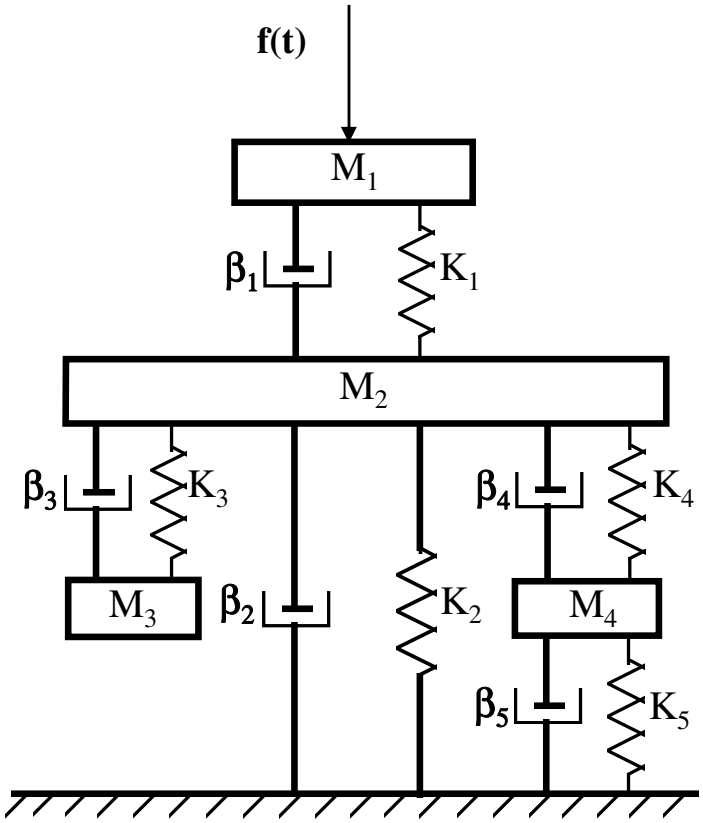
$$J_{1e} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_{2e}; \quad \beta_{1e} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \beta_{2e}$$

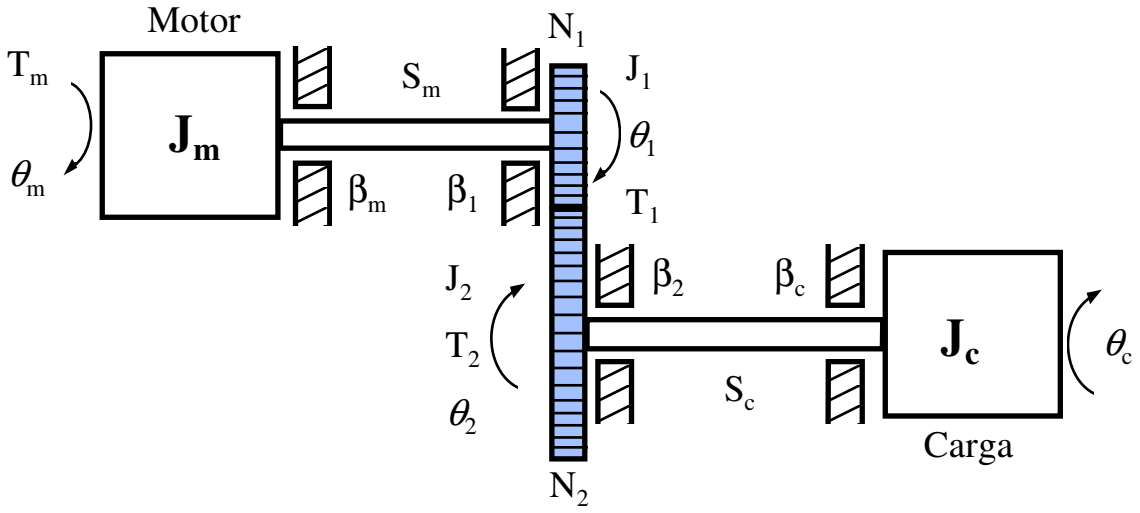
Ejercicios para realizar en clase

1.- Obtener la función de transferencia $W(s)/V_a(s)$, de un motor de c.d. con excitación independiente.



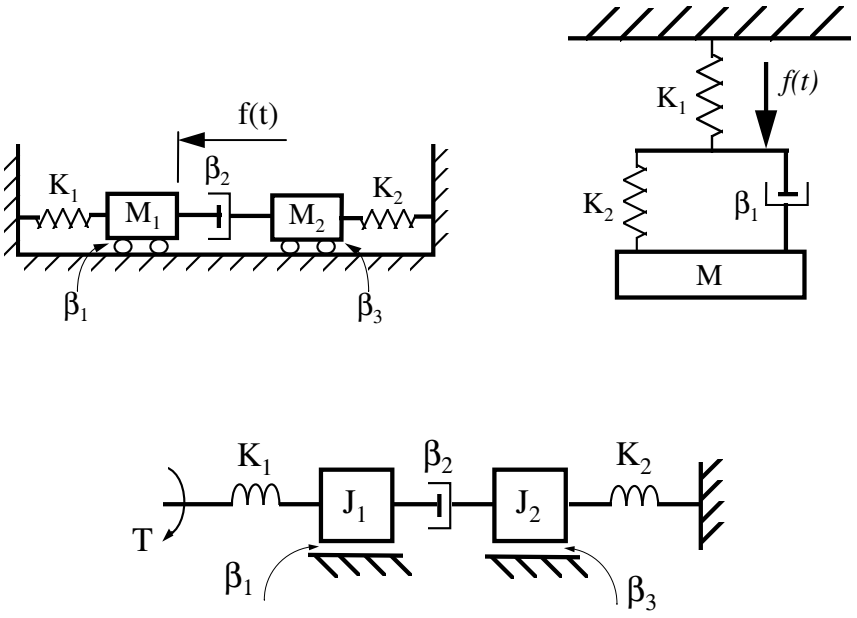
2.- Obtener las ecuaciones diferenciales del siguiente sistema mecánico.



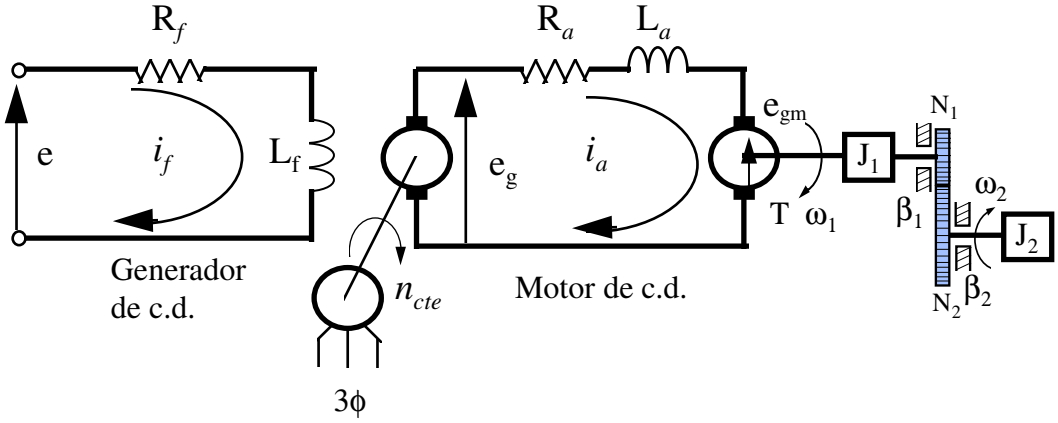


Ejercicios de tarea

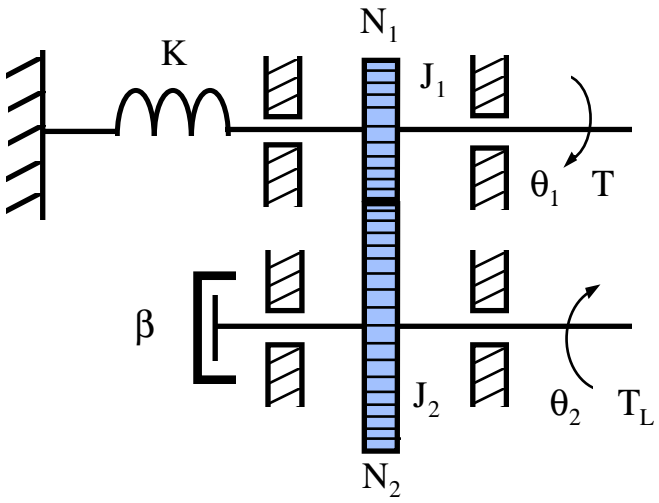
1.- Obtener las ecuaciones diferenciales de los siguientes sistemas mecánicos.

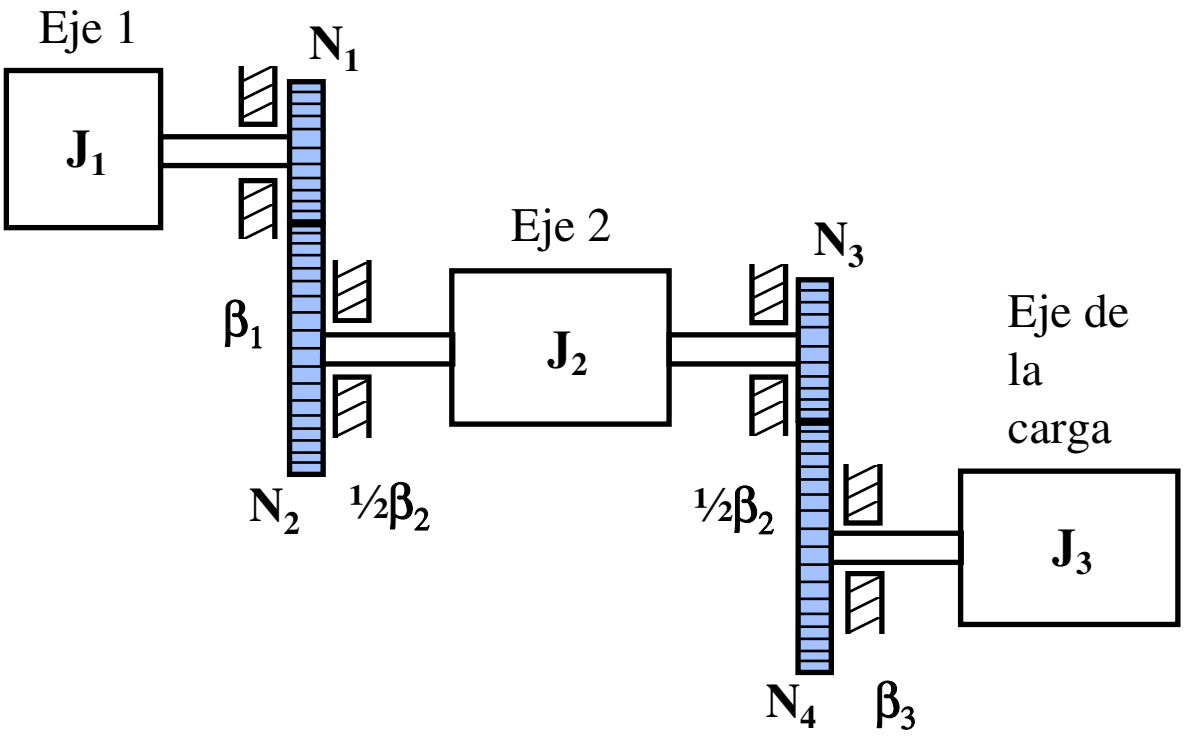


2`.- Obtener la función de transferencia $W_2(s)/E(s)$ del sistema Ward-Leonard. Supóngase que el voltaje generado $e_g = K_g i_f$, donde K_g es la constante del generador.



3.- Obtener las ecuaciones diferenciales de los siguientes sistemas mecánicos. a) Con referencia al eje del primario. b) Con referencia al eje de la carga.





Unidad 2
Simplificación de diagramas de bloques.

2.1 Diagramas y álgebra de bloques.

Diagrama de bloques. Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente y del flujo de las señales.

En un diagrama de bloques, todas las variables del sistema son enlazadas entre sí a través de bloques funcionales. El bloque es un símbolo de la operación matemática que el bloque produce a la salida, sobre la señal que tiene a la entrada. Las funciones de transferencia de los componentes, generalmente se colocan en los bloques correspondientes, que están conectados por flechas para indicar la dirección del flujo de señales.

En la Fig.2.1 muestra un elemento del diagrama de bloques. La flecha que apunta hacia el bloque indica la entrada y la flecha que se aleja del bloque, representa la salida. A estas flechas normalmente se les denomina señales.

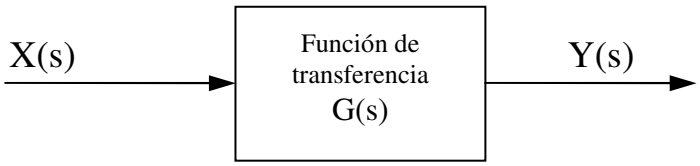


Fig.2.1 Elemento de un diagrama de bloques.

En general se puede ver más fácilmente el funcionamiento de un sistema, examinando el diagrama de bloques que examinando el sistema físico en si. Un diagrama de bloques contiene información con respecto al comportamiento dinámico, pero no contiene ninguna información respecto a la constitución física del sistema.

Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado. La Fig.2.2 muestra el diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado. La salida C(s) es alimentada nuevamente al punto de suma, donde se le compara con la entrada de referencia R(s).

Cualquier sistema de control lineal puede ser representado por un diagrama de bloques, puntos de suma y puntos de bifurcación. Un punto de bifurcación es el punto desde el cual la señal de salida de un bloque va a otros bloques o puntos de suma.

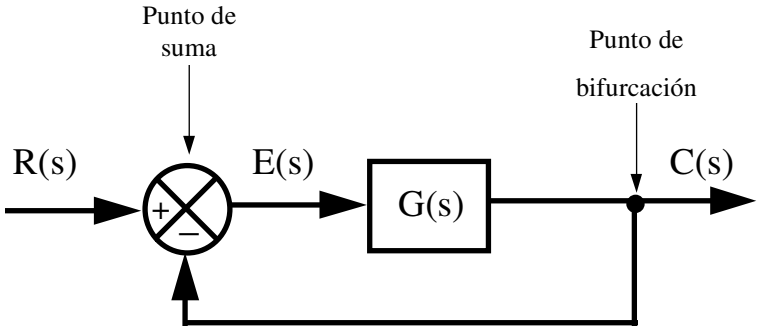


Fig.2.2 Diagrama de bloques de un sistema de lazo cerrado.

Simplificación de un sistema de control de lazo cerrado.

En la Fig.2.3 se muestra un sistema de control de lazo cerrado en donde :

R(s) = Señal de entrada
C(s) = Señal de salida.
G(s) = Función de transferencia directa.
H(s) = Función de transferencia de la realimentación

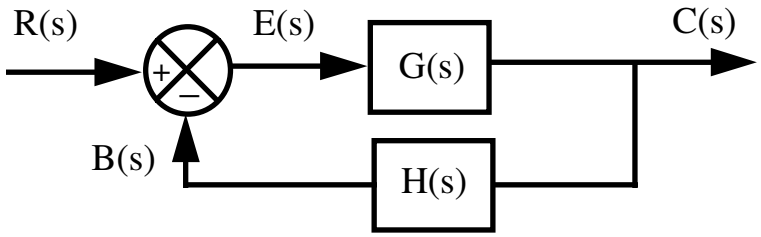


Fig.2.3 Sistema de lazo cerrado

La salida y la entrada de este sistema de control están relacionadas como sigue :

$$C(s) = G(s)E(s)$$
$$B(s) = H(s)C(s)$$
$$E(s) = R(s) - B(s)$$

Sustituyendo E(s) y B(s) en C(s) se tiene :

$$C(s) = G(s)\left[R(s) - H(s)C(s)\right]$$
$$C(s) + C(s)G(s)H(s) = G(s)R(s)$$
$$C(s)\left[1 + G(s)H(s)\right] = G(s)R(s)$$
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Donde :

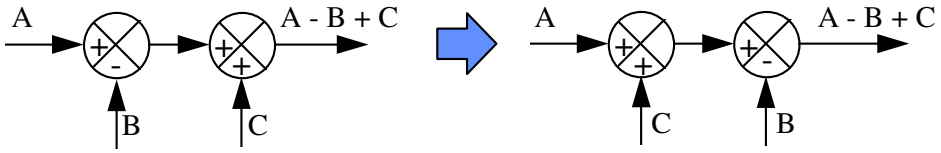
G(s)H(s) = Función de transferencia de lazo abierto.

C(s)/R(s) = Función de transferencia de lazo cerrado.

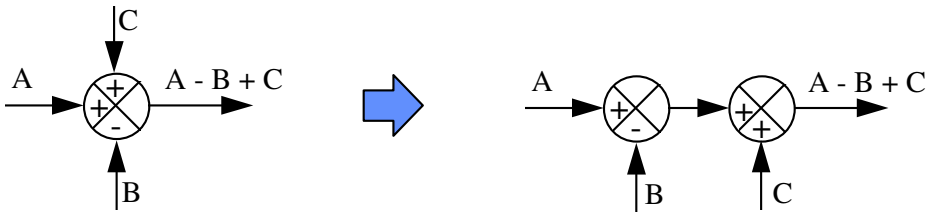
1 + G(s)H(s) = Ecuación característica del sistema.

Reglas de simplificación del álgebra de bloques.

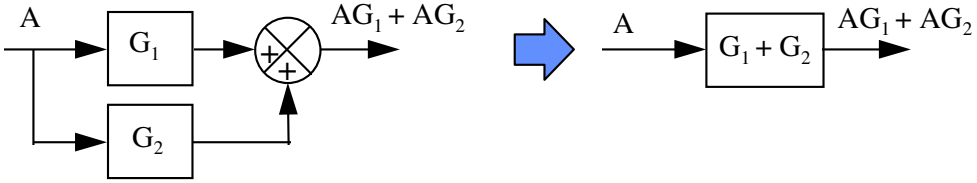
1.-



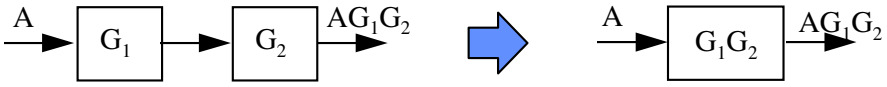
2.-



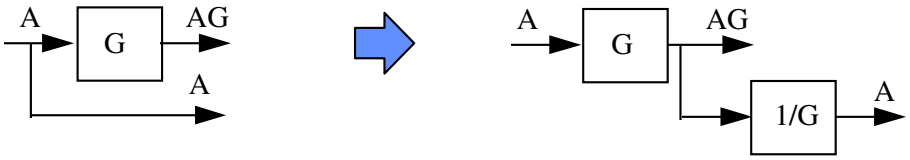
3.-



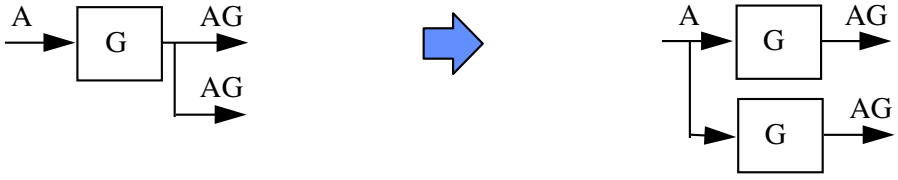
4.-

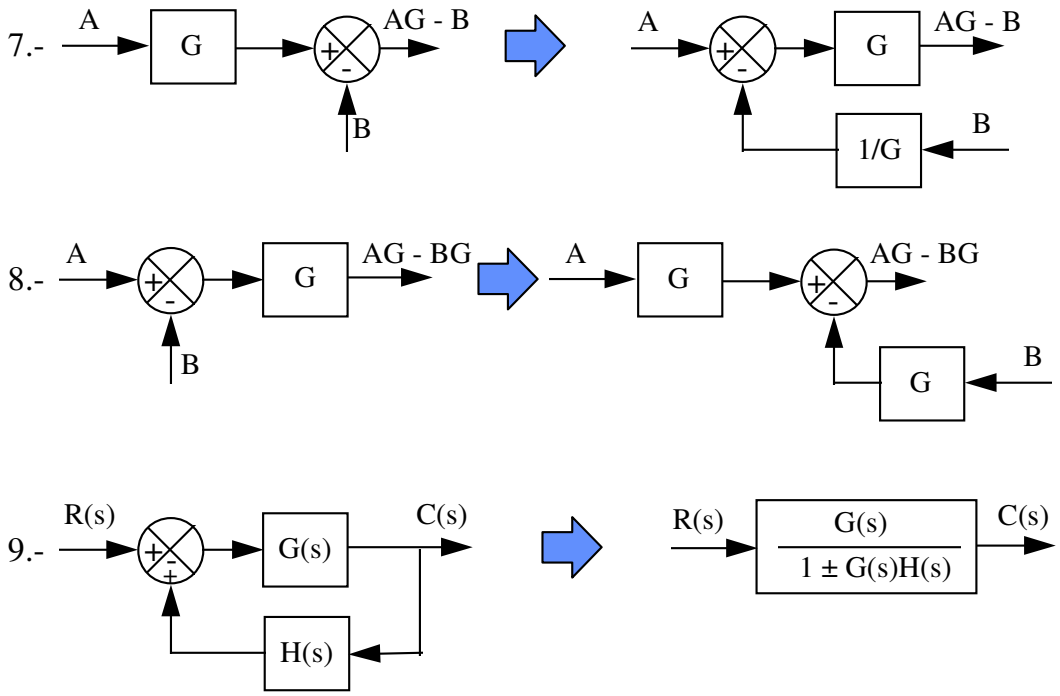


5.-



6.-

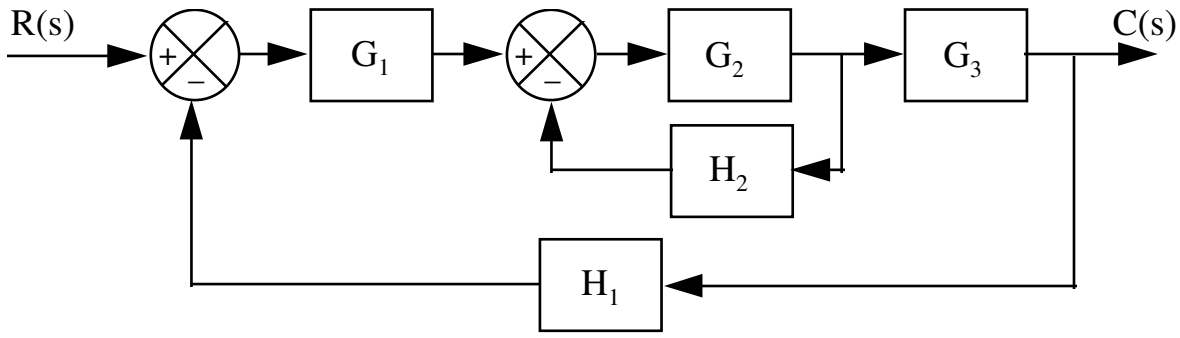




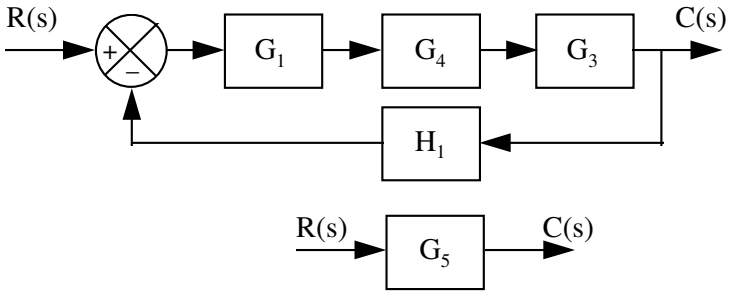
Ejemplos

Simplificar los siguientes diagramas de bloques.

1.-



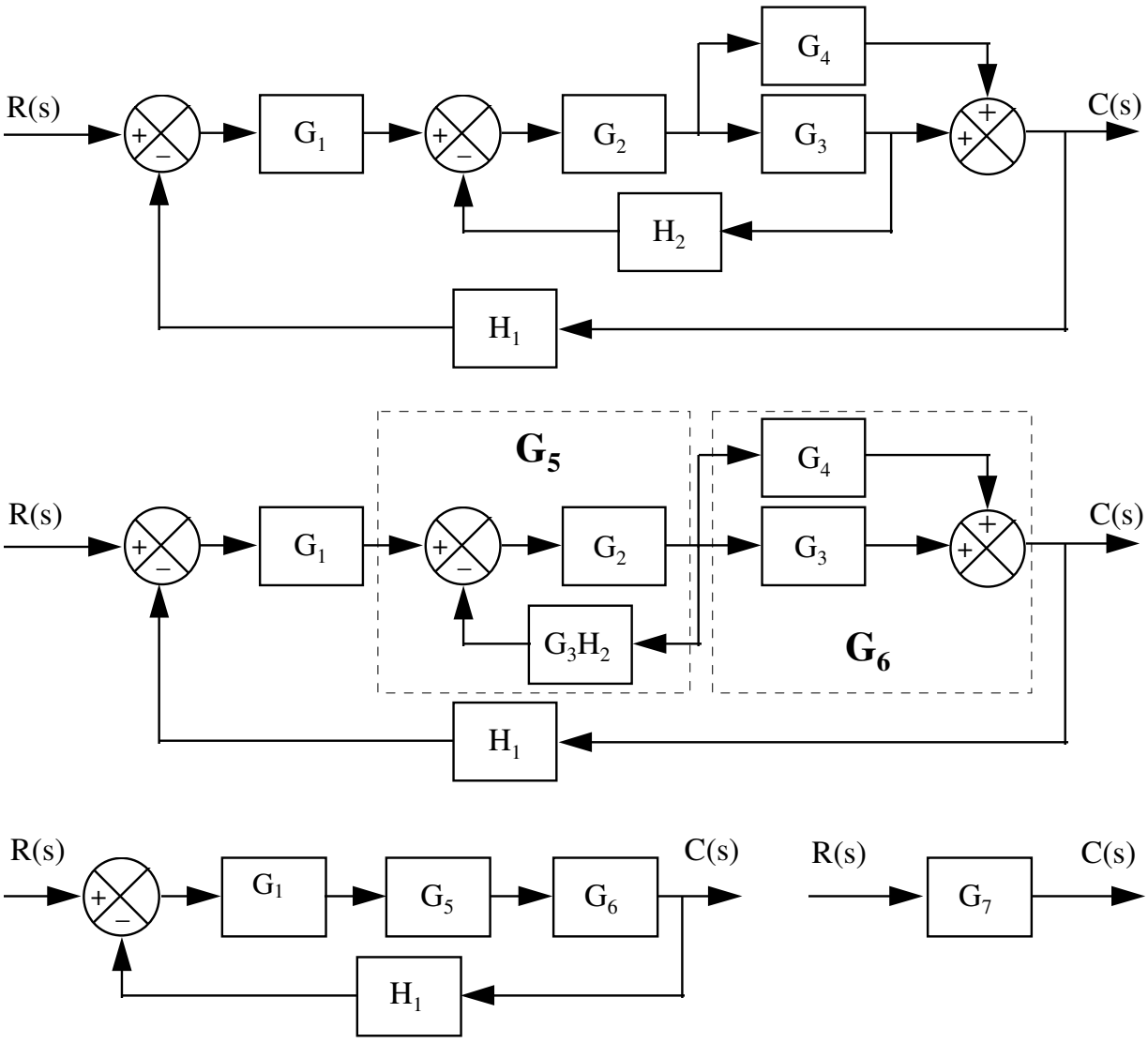
$$G_4 = \frac{G_2}{1 + G_2 H_2}$$



$$G_5 = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_4 G_3}{1 + G_1 G_4 G_3 H_1}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1}$$

2.-



$$G_5 = \frac{G_2}{1 + G_2 G_3 H_2} \quad ; \quad G_6 = G_3 + G_4$$

$$G_7 = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_5 G_6}{1 + G_1 G_5 G_6 H_1}$$

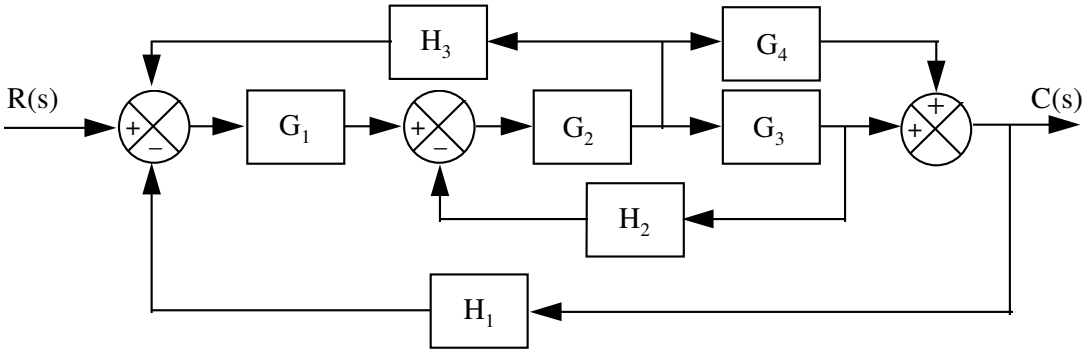
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{G_1 G_2 \left(G_3 + G_4 \right)}{1 + G_2 G_3 H_2}}{1 + \dfrac{G_1 G_2 \left(G_3 + G_4 \right) H_1}{1 + G_2 G_3 H_2}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_4 H_1}$$

Ejercicios para realizar en clase

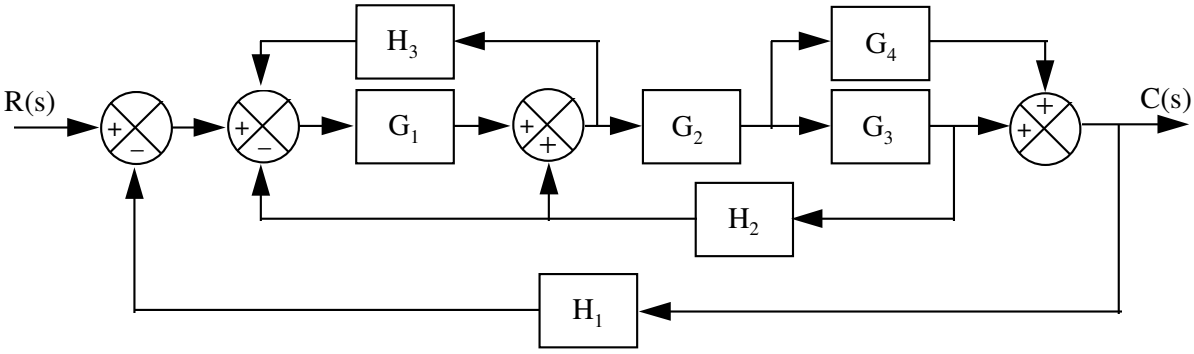
Simplificar los siguientes diagramas de bloques.

1.-

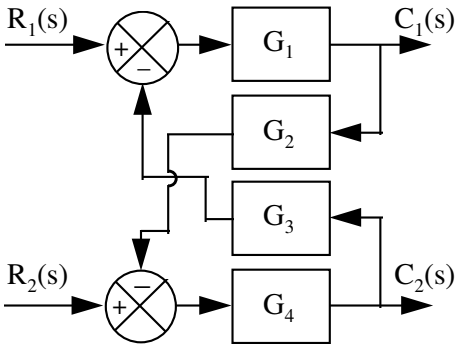


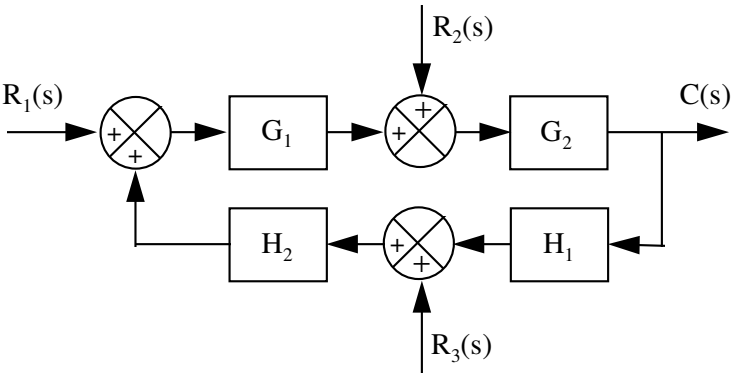
p

2.-



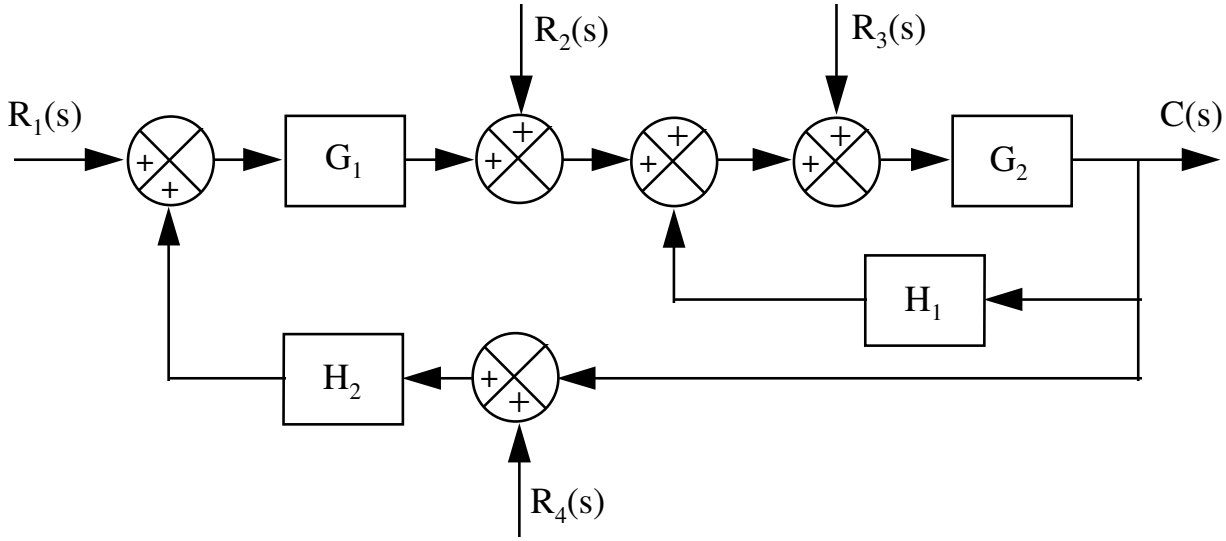
3.-



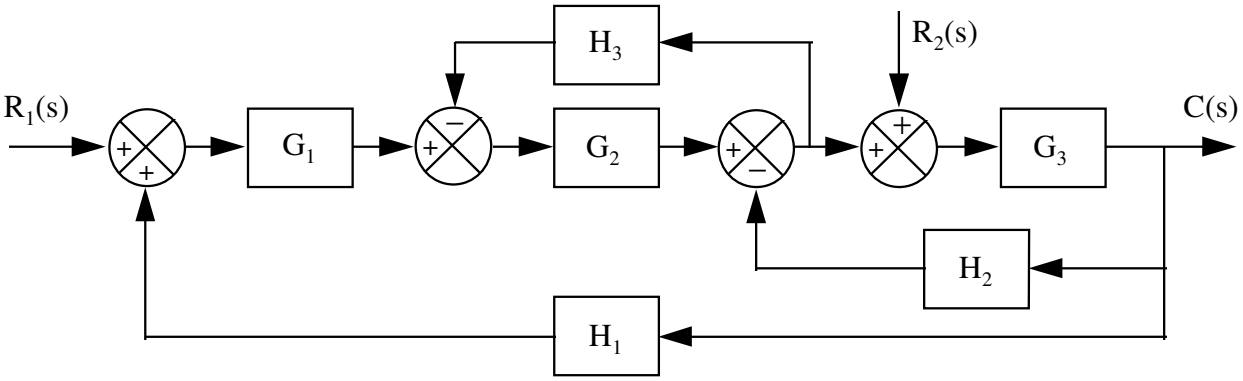


Ejercicios de tarea.

1.- Obtener C(s) para el siguiente diagrama de bloques.



2.- Obtener C(s) para el siguiente diagrama de bloques.



2.2 Gráficos de flujo de señal.

Gráfico de flujo de señal. Un gráfico de flujo de señal es un diagrama que representa un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas.

Un gráfico de flujo de señal consiste en una red en la cual los nodos están conectados por ramas con dirección y sentido, cada nodo representa una variable del sistema y cada rama conectada entre dos nodos actúa como un multiplicador de señal. El gráfico de flujo de señal muestra el flujo de las señales de un punto del sistema a otro y da las relaciones entre las señales.

Definiciones.

Nodo.- Un nodo es un punto que representa una variable ó señal.

Transmitancia.- Es una ganancia entre dos nodos.

Rama.- Es un segmento de línea con dirección y sentido que une dos nodos. La ganancia de una rama es una transmitancia.

Nodo de entrada.- Es un nodo que solo tiene ramas que salen. Corresponde a una variable independiente.

Nodo de salida.- Es un nodo que solo tiene ramas que entran. Corresponde a una variable dependiente

Nodo mixto.- Es un nodo que tiene tanto ramas que salen, como ramas que entran.

Camino ó Trayecto.- Es un recorrido de ramas conectadas en el sentido de las flechas de las ramas. Si no se cruza ningún nodo más de una vez, el camino ó trayecto es abierto. Si el camino ó trayecto finaliza en el mismo nodo del cual partió y no cruza ningún nodo más de una vez es un camino o trayecto cerrado.

Lazo.- Es un camino ó trayecto cerrado.

Ganancia de lazo.- Es el producto de las transmitancias de las ramas de un lazo.

Lazos disjuntos.- Son lazos que no poseen ningún nodo en común.

Trayecto directo.- Es el trayecto de un nodo de entrada a un nodo de salida que no cruza ningún nodo más de una vez.

Ganancia de trayecto directo.- Es el producto de las transmitancias de las ramas de un trayecto directo.

En la Fig.2.4 se muestra un gráfico de flujo de señal en el que se representan las definiciones anteriores en donde :

x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 ,u = nodos del gráfico.
x_1, u = nodos de entrada.
x_5 = nodo de salida.
x_2 , x_3 , x_4 = nodos mixtos.

L_1 , L_2 , L_3 = lazos.

$L_1 = x_2 , x_3 , x_2$; $L_2 = x_3 , x_4 , x_3$; $L_3 = x_4 , x_5 , x_4$; $L_4 = x_2 , x_4 , x_3 , x_2$

$L_1 = be$; $L_2 = cf$; $L_3 = dg$; $L_4 = ife$ Ganancia de lazo.

L_{13} = lazos disjuntos.

$L_{13} = bedg$ Ganancia de lazos disjuntos.

M_1 , M_2 , M_3 , M_4 = Trayectos directos.

$M_1 = x_1x_2x_3x_4x_5$; $M_2 = x_1x_2x_4x_5$; $M_3 = ux_3x_4x_5$; $M_4 = ux_3x_2x_4x_5$

$M_1 = abcd$; $M_2 = aid$; $M_3 = hcd$; $M_4 = heid$ Ganancia de trayecto directo.

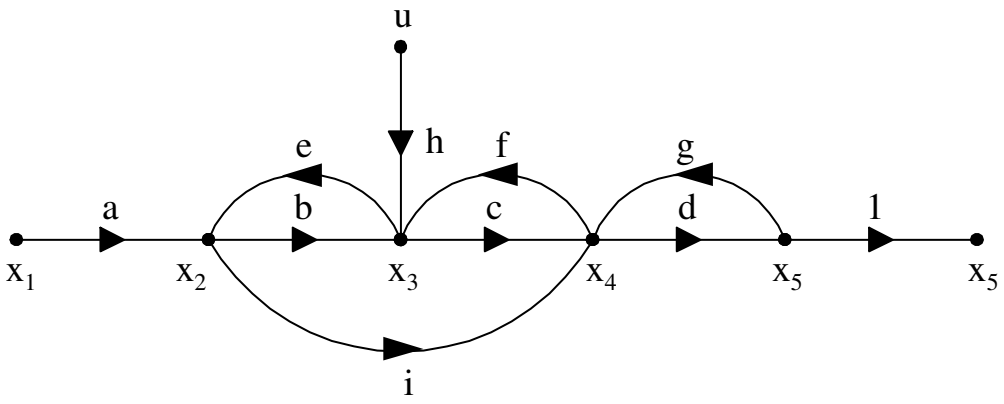


Fig.2.4 Gráfico de flujo de señal.

Representación de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultaneas.

$$x_2 = t_{12}x_1 + t_{32}x_3$$
$$x_3 = t_{23}x_2 + t_{43}x_4$$
$$x_4 = t_{24}x_2 + t_{34}x_3 + t_{44}x_4$$
$$x_5 = t_{25}x_2 + t_{45}x_4$$

El gráfico de flujo de señal se muestra en la Fig.2.5

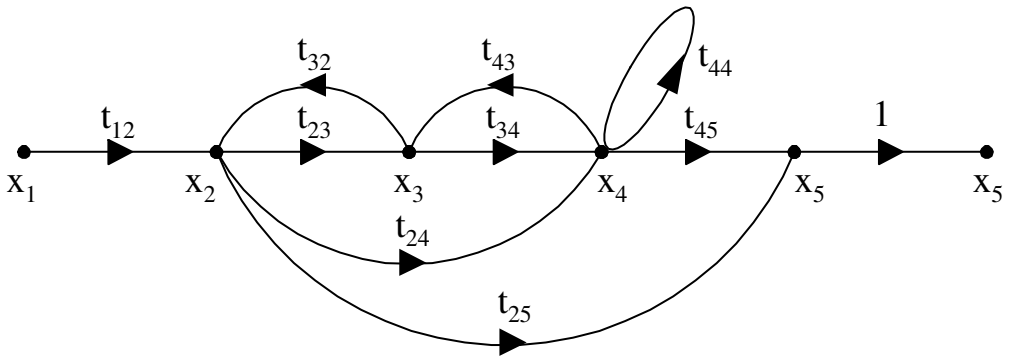


Fig.2.5 Gráfico de flujo de señal del sistema de ecuaciones simultaneas.

Fórmula general de ganancia para gráficos de flujo de señal.

Al resolver la relación funcional entre las variables de entrada y salida de un gráfico de flujo de señal se ha obtenido una fórmula general de ganancia que permite expresar directamente la relación funcional. Esta fórmula, debida a Mason, es

$$M = \sum_k \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{x_{sal}}{x_{en}}$$

donde :

M = Función de transferencia.

M_k = Ganancia del k'esimo trayecto directo.

Δ_k = Cofactor.

Δ = Determinante.

x_{sal} = Variable de salida.

x_{en} = Variable de entrada.

Δ = 1- (suma de las ganancias de todos los lazos individuales) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos disjuntos) - (suma de los productos de las ganancias de todas las posibles combinaciones de tres lazos disjuntos) + ...

Δ_k = Al valor del Δ para la parte del gráfico que es disjunta al k'esimo camino directo.

La solución de gráfico de flujo de la Fig.2.5 utilizando la fórmula de Mason se describe a continuación.

Ganancia de trayectos directos

$$M_1 = t_{12}\, t_{23}\, t_{34}\, t_{45}$$
$$M_2 = t_{12}\, t_{24}\, t_{45}$$
$$M_3 = t_{12}\, t_{25}$$

Ganancia de lazos individuales

$$L_1 = t_{23}\, t_{32}$$
$$L_2 = t_{34}\, t_{43}$$

$$L_3 = t_{44}$$
$$L_4 = t_{24}\, t_{43}\, t_{32}$$

Ganancia de dos lazos disjuntos

$$L_{13} = t_{23}\, t_{32}\, t_{44}$$

Determinante

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_{13}$$

Los cofactores se obtienen analizando cada uno de los trayectos directos, y habrá tantos, como trayectos directos existan en el gráfico. Por ejemplo para determinar Δ_1 se procede de la siguiente forma:

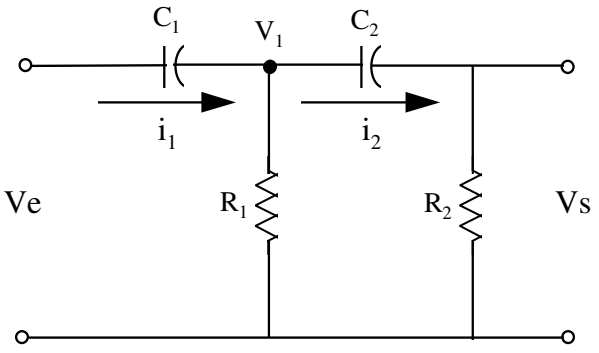
Δ_1 es igual al determinante quitándole (haciendo cero) todos los lazos que toquen al trayecto M_1 , por lo tanto $\Delta_1 = 1$ ya que todos los lazos tocan al trayecto M_1 . Como al trayecto M_2 también lo tocan todos los lazos, $\Delta_1 = 1$. Para el trayecto M_3 , los lazos L_2 y L_3 no lo tocan, por lo tanto $\Delta_1 = 1 - (L_2 + L_3)$.

Sustituyendo en la fórmula de Mason se obtiene

$$M = \frac{x_5}{x_1} = \frac{M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + M_3 \Delta_3}{\Delta}$$

$$\frac{x_5}{x_1} = \frac{t_{12}t_{23}t_{34}t_{45} + t_{12}t_{24}t_{45} + t_{12}t_{25}\left(1 - t_{34}t_{43} - t_{44}\right)}{1 - t_{23}t_{32} - t_{34}t_{43} - t_{44} - t_{24}t_{43}t_{32} + t_{23}t_{32}t_{44}}$$

Los gráficos de flujo de señal también se pueden utilizar para obtener funciones de transferencia de circuitos eléctricos. A continuación se ilustra un ejemplo.



Para el circuito eléctrico las ecuaciones diferenciales son las siguientes

$$i_1 = C_1 \frac{dv_e}{dt} - C_1 \frac{dv_1}{dt}$$
$$v_1 = i_1 R_1 - i_2 R_1$$
$$i_2 = C_2 \frac{dv_1}{dt} - C_2 \frac{dv_s}{dt}$$
$$v_s = i_2 R_2$$

y transformando a Laplace con condiciones iniciales igual a cero
xc

$$I_1(s) = C_1 s V_e(s) - C_1 s V_1(s)$$
$$V_1(s) = I_1(s) R_1 - I_2(s) R_1$$
$$I_2(s) = C_2 s V_1(s) - C_2 s V_s(s)$$
$$V_s(s) = I_2(s) R_2$$

El gráfico de flujo de señal para este sistema de ecuaciones se muestra en la Fig.2.6 .

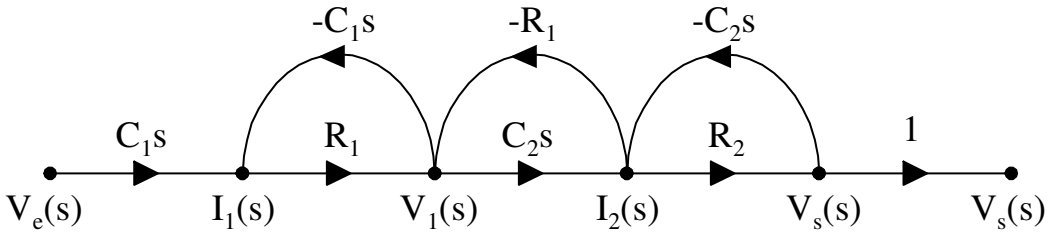


Fig.2.6. Gráfico de flujo de señal del circuito eléctrico.

Para este gráfico de flujo se tiene solamente un trayecto directo

$$M_1 = R_1 R_2 C_1 C_2 s^2$$

tres lazos individuales

$$L_1 = -R_1C_1\,s \;;\; L_2 = -R_1C_2\,s \;;\; L_3 = -R_2C_2\,s$$

y lazos disjuntos

$$L_{13} = R_1\,R_2\,C_1\,C_2\,s^2$$

por lo tanto

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_{13}$$

como hay un solo trayecto directo, y todos los lazos lo tocan $\Delta_1 = 1$

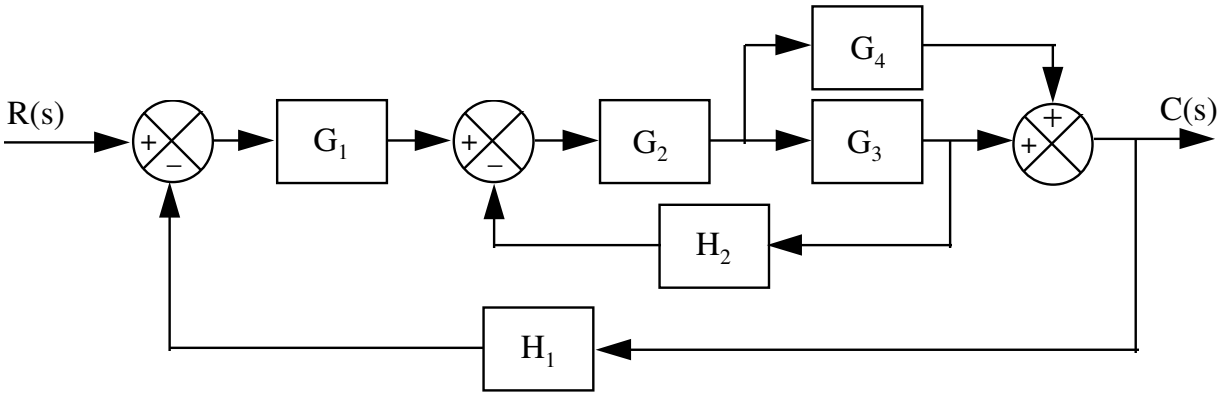
Utilizando la fórmula de Mason se obtiene :

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{R_1R_2C_1C_2s^2}{1 + s\left(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2\right) + R_1R_2C_1C_2s^2}$$

que es la función de transferencia del circuito eléctrico original.

Otra de las aplicaciones del gráfico de flujo de señal es la de simplificar diagramas de bloques. En la Fig.2.7a se muestra un diagrama de bloques y en la Fig.2.7b su gráfico de flujo de señal.



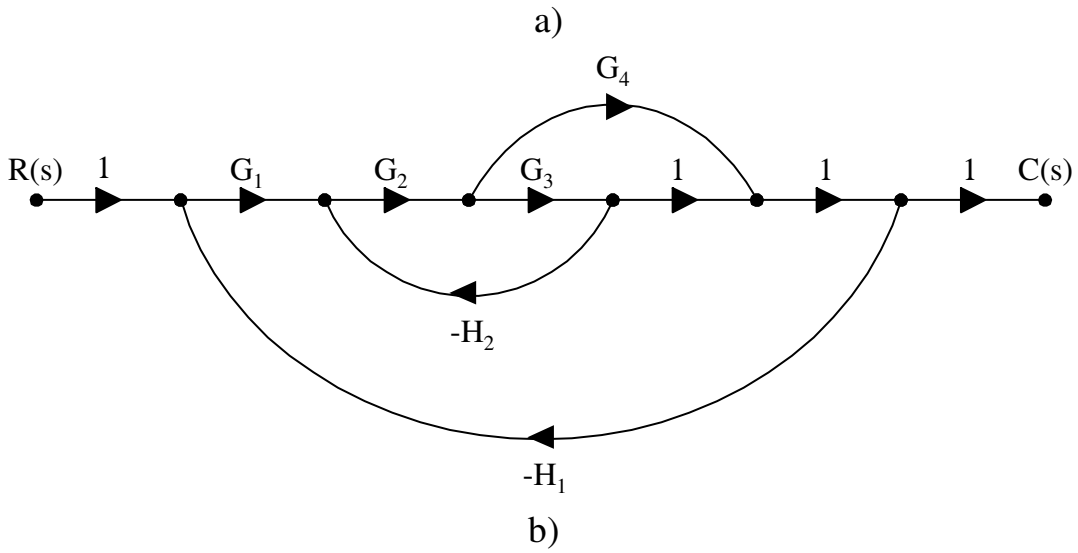


Fig.2.7 a) Diagrama de bloques. b) Gráfico de flujo de señal.

Para el gráfico de flujo de la Fig.2.7b

$M_1 = G_1\, G_2\, G_3$ $\quad L_1 = -\, G_2\, G_3\, H_2$ $\quad \Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$

$M_2 = G_1\, G_2\, G_4$ $\quad L_2 = -\, G_1\, G_2\, G_3\, H_1$ $\quad \Delta_1 = 1$

$L_3 = -\, G_1\, G_2\, G_4\, H_1$ $\quad \Delta_2 = 1$

sustituyendo en la fórmula de Mason

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta}$$

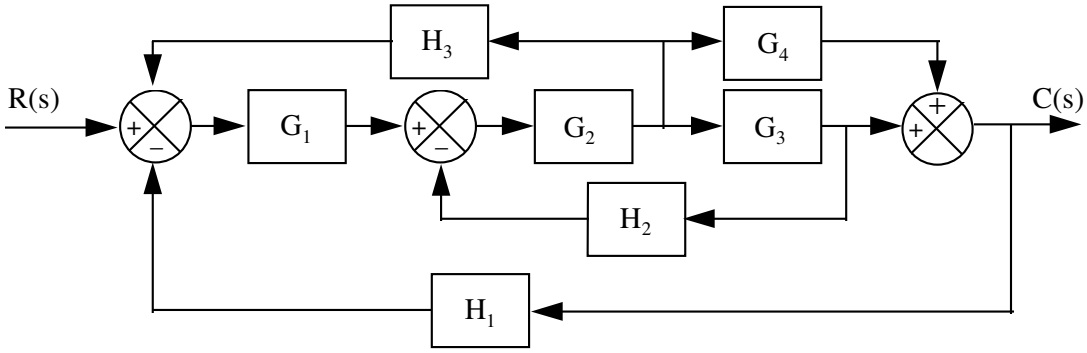
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_2G_4}{1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3H_1 + G_1G_2G_4H_1}$$

como se puede ver, en este tipo de simplificación el resultado depende de la veracidad de los datos que se aplican en la fórmula de Mason, si se omite algún lazo individual, lazo disjunto, tratecto directo ó cofactor, el resultado será incorrecto. Claro está que la gran ventaja de utilizar gráficos de flujo para simplificar diagramas de bloques, evita el desarrollo algebraico tan laborioso que presenta el trabajar con álgebra de bloques.

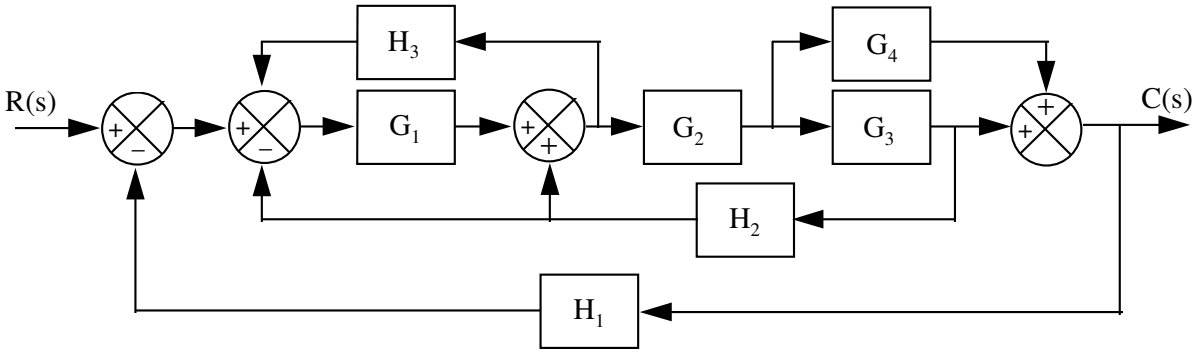
Ejercicios para realizar en clase

Simplificar los siguientes diagramas de bloques.

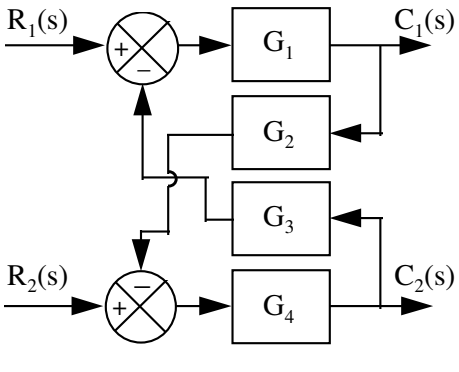
1.-

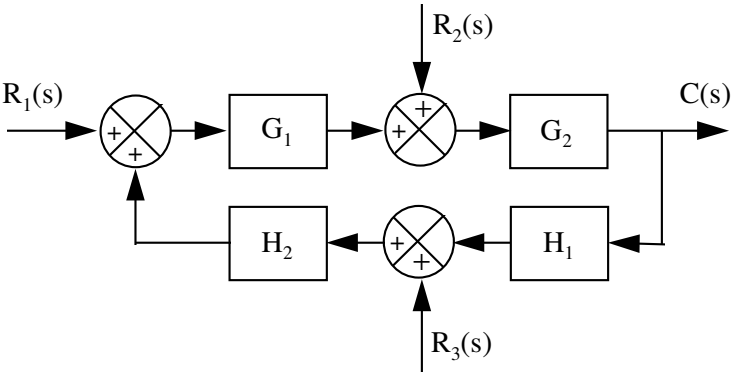


2.-



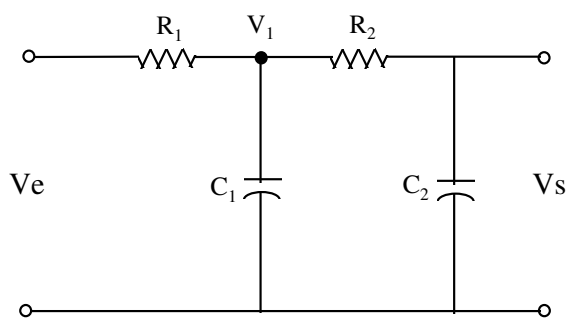
3.-

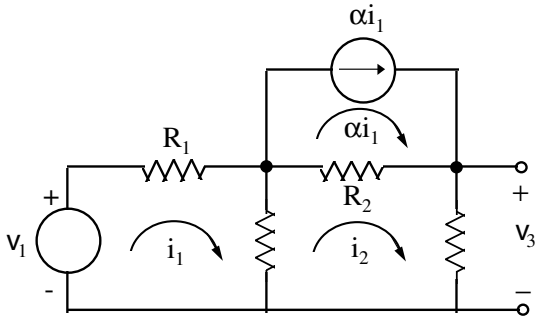




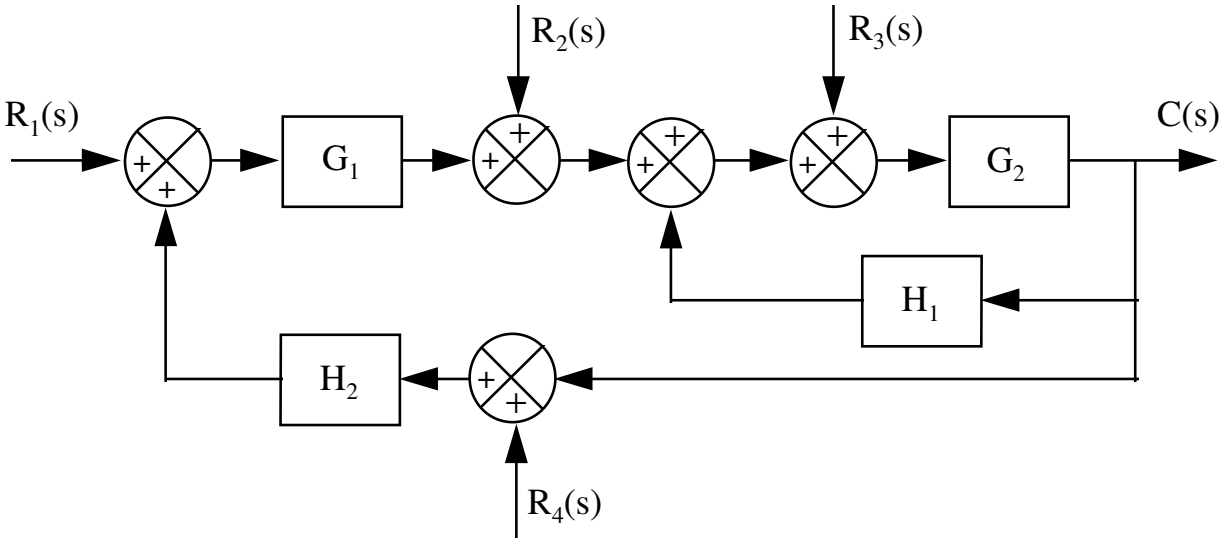
<u>Ejercicios de tarea</u>.

1.- Utilizando un gráfico de flujo de señal, obtener : $V_s(s)/V_e(s)$; $V_3(s)/V_1(s)$

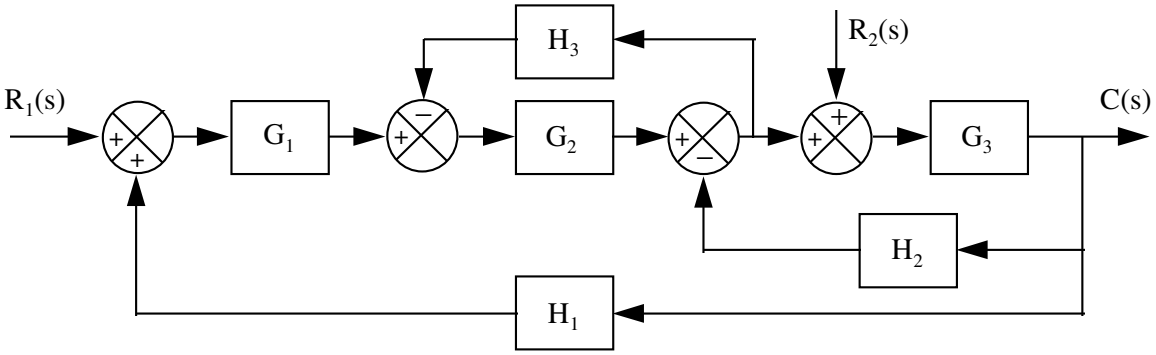




2.- Obtener C(s) para el siguiente diagrama de bloques.



3.- Obtener C(s) para el siguiente diagrama de bloques.



Unidad 3
Acciones Básicas de Control

3.1 Controladores automáticos.

Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia, determina el error, y produce una señal de control que reducirá el error a cero, o a un valor muy pequeño. La forma como el controlador automático produce la señal de control, se denomina *acción de control.*

En la Fig. 3.1 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control de lazo cerrado, en el que se remarca el controlador y las señales de entrada y salida.

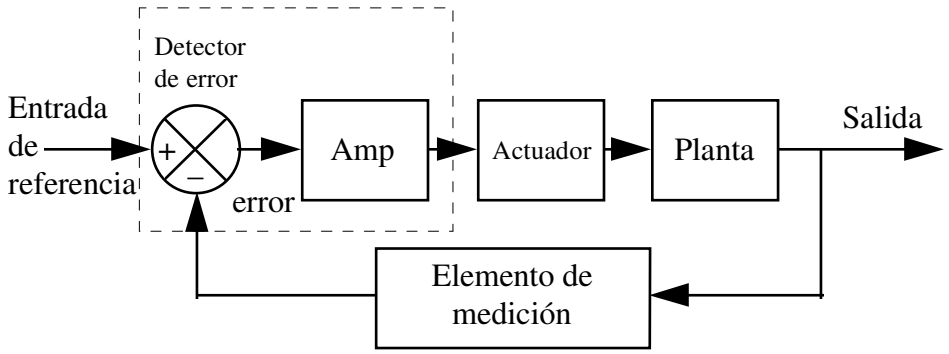


Fig. 3.1 Diagrama de bloques de un sistema de control de lazo cerrado.

Clasificación de los controladores automáticos.

1.- Controladores de dos posiciones, o encendido - apagado.
2.- Controladores proporcionales.
3.- Controladores integrales.
4.- Controladores proporcional - integral.
5.- Controladores proporcional - derivativo.
6.- Controladores proporcional - integral - derivativo.

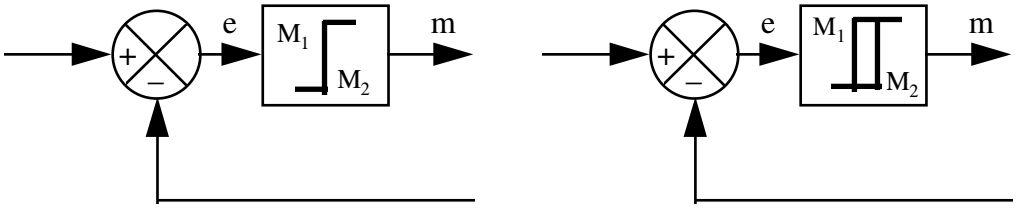
Acción de control de dos posiciones.

En un sistema de control de dos posiciones, el elemento accionador tiene solamente dos posiciones fijas, que son simplemente conectado y desconectado.

Sea la señal de salida de control *m(t)* y la señal de error actuante *e(t)*. En un control de dos posiciones, la señal *m(t)* permanece en un valor máximo o mínimo según la señal de error actuante sea positiva o negativa, de modo que :

$$m(t) = M_1 \quad \text{para } e(t) > 0 \quad ; \quad m(t) = M_2 \quad \text{para } e(t) < 0$$

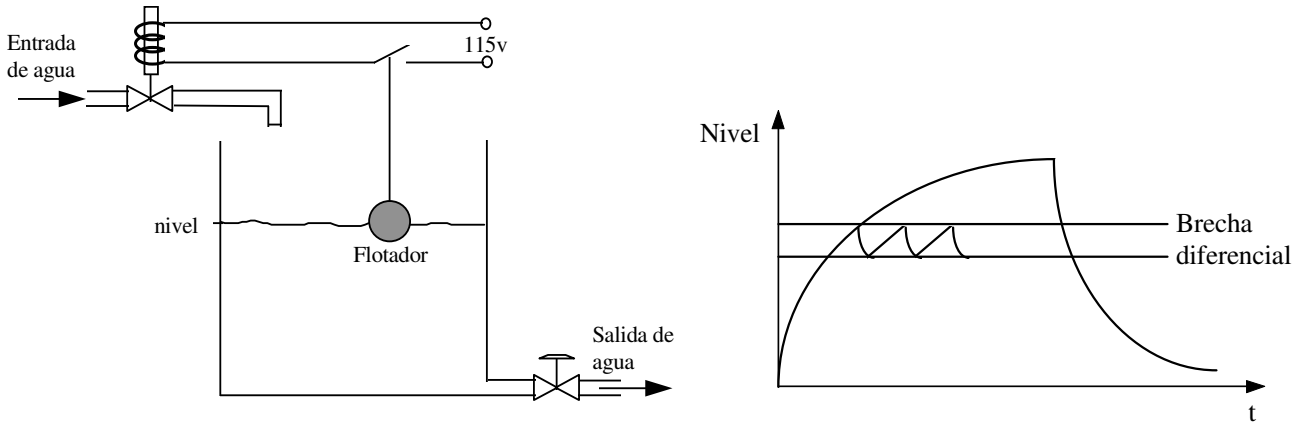
En las Fig. 3.2 a y b se pueden ver diagramas de bloques de controladores de dos posiciones. El rango en que la señal de error debe variar antes de que se produzca la conmutación se denomina brecha diferencial, zona muerta o lazo de histéresis.



a) b)

Fig. 3.2 Diagramas de bloques. a) Controlador encendido - apagado.
b) controlador encendido - apagado con brecha diferencial.

Para el sistema de control de nivel de líquido que se ve en la Fig. 3.3 a , con un controlador de dos posiciones, la válvula está o bien abierta o cerrada. El caudal de entrada de agua es una constante positiva o cero. Como se puede apreciar en la Fig.3.3b la señal de salida se mueve continuamente entre los dos limites requeridos para que el elemento accionador se desplace de una posición fija a la otra. Se puede reducir la amplitud de la oscilación de salida reduciendo la brecha diferencial. Esto, sin embargo, aumenta la cantidad de conmutaciones por minuto y reduce la vida útil de los componentes del sistema.



a) b)

Fig 3.3 a) Sistema de control de nivel de líquido. b) Gráfica de nivel de líquido en función del tiempo.

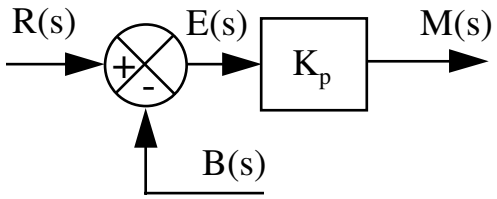
Controlador proporcional.

Para un controlador proporcional la relación entre la salida M(s) y la señal de error actuante E(s) se representa en forma general por la siguiente función de transferencia

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p$$

donde K_p es la ganancia proporcional.

El controlador proporcional esencialmente es un amplificador con ganancia ajustable.



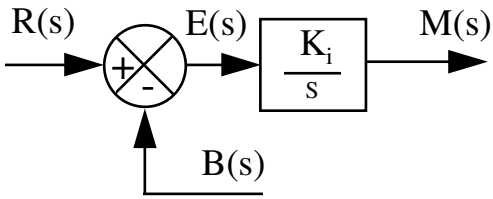
Controlador integrador.

En forma general la función de transferencia de un controlador integrador es

$$\frac{M(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

donde K_i es una constante regulable.

La representación en diagrama de bloques de este controlador se muestra a continuación.



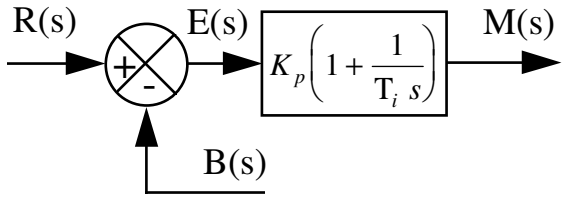
Controlador proporcional - integrador PI.

La función de transferencia en forma general de un controlador **PI** es

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i\, s}\right)$$

donde

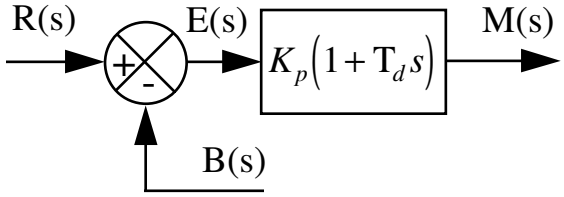
K_p = ganancia proporcional.
T_i = constante de tiempo de integración.



Controlador proporcional - derivativo PD.
La función de transferencia de un controlador **PD** es

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1+T_d s\right)$$

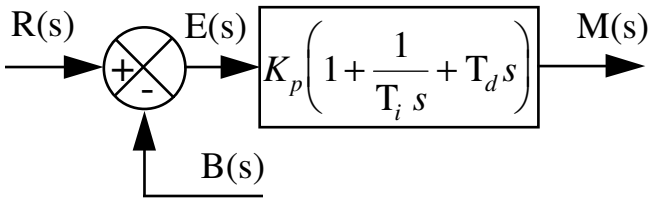
donde
K_p = ganancia proporcional.
T_d = constante de tiempo derivativa.



Controlador proporcional - integrador - derivativo PID.
Para un controlador **PID** la función de transferencia esta dada por

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p\left(1+\frac{1}{T_i\, s}+T_d s\right)$$

donde
K_p = ganancia proporcional.
T_i = constante de tiempo de integración.
T_d = constante de tiempo derivativa.



Implementación de controladores con amplificadores operacionales.

Características ideales de operación de un amplificador operacional.

El amplificador operacional ideal tiene las siguientes características :

1) Impedancia de entrada infinita, $Z_e = \infty$. (Se le puede alimentar cualquier señal sin problemas de carga)
2) Impedancia de salida cero, $Z_s = 0$. (Potencia suministrada por el amplificador no limitada)
3) Ganancia infinita, $K = \infty$.

En la fig.3.4 se muestra el diagrama eléctrico de un amplificador operacional

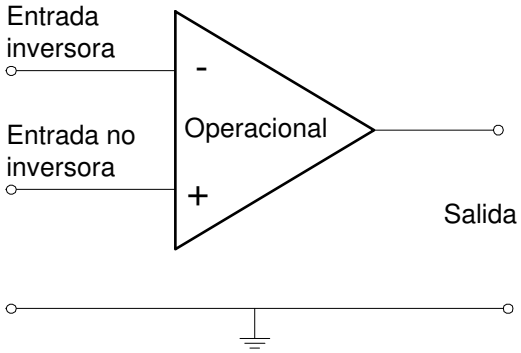


Fig.3.4 Amplificador operacional.

Controlador proporcional P.

Controlador proporcional inversor.- En la Fig. 3.5 se muestra el diagrama eléctrico de un controlador proporcional inversor.

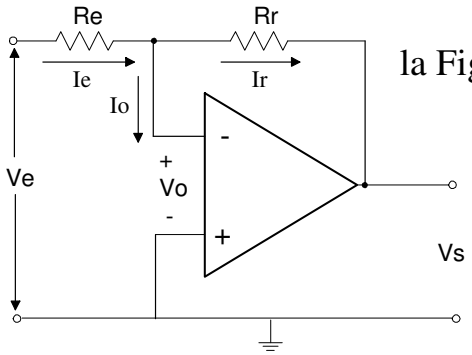


Fig. 3.5 Controlador proporcional inversor

La ecuación de corrientes del circuito de la Fig.3.5 es

$$i_e = i_0 + i_r$$

como $Z_e = \infty$, $i_0 = 0$ y por lo tanto $i_e = i_r$

$$i_e = \frac{v_e - v_0}{R_e} \quad ; \quad i_r = \frac{v_0 - v_s}{R_r}$$

igualando estas ecuaciones se obtiene

$$\frac{v_e - v_0}{R_e} = \frac{v_0 - v_s}{R_r}$$

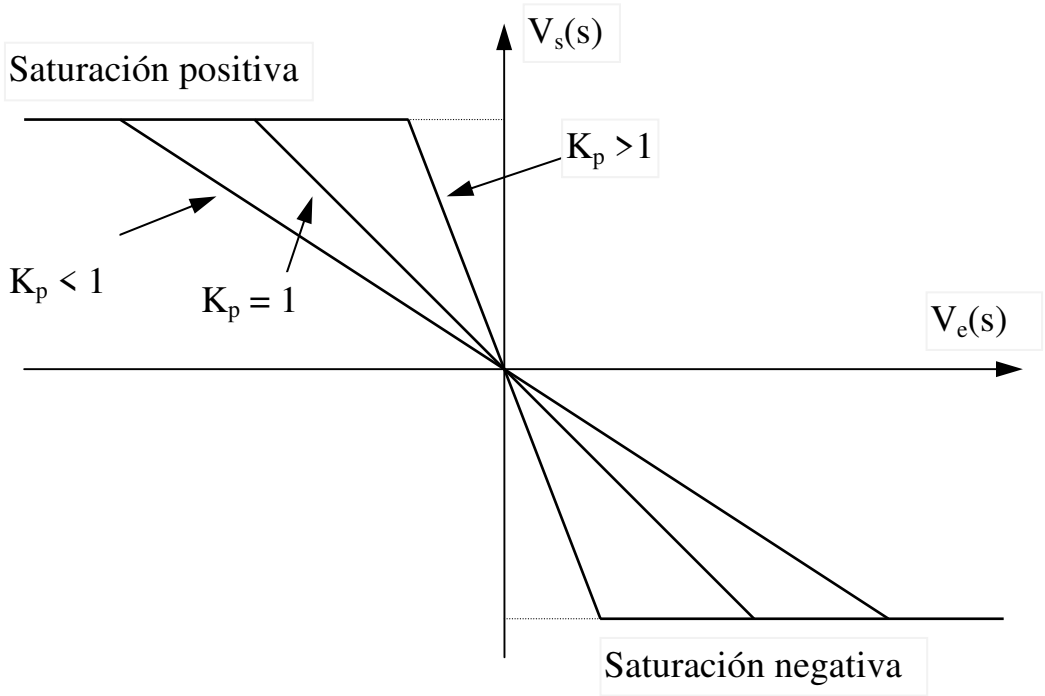
y como $v_0 = 0$, la ganancia es

$$\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_r}{R_e}$$

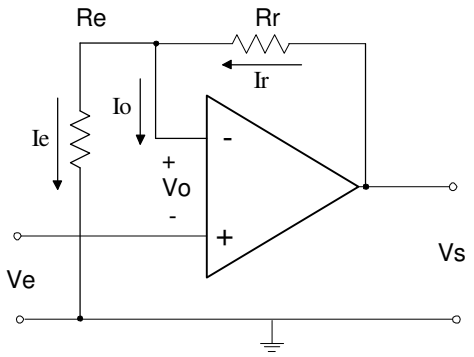
transformando a Laplace con condiciones iniciales iguales a cero, la función de transferencia del controlador es

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{R_r}{R_e} = K_p$$

La función de transferencia en forma gráfica se muestra a continuación



Controlador proporcional no inversor.



$$i_r = i_0 + i_e$$

$$\frac{v_e + v_0}{R_e} = \frac{v_s - (v_e + v_0)}{R_r}$$

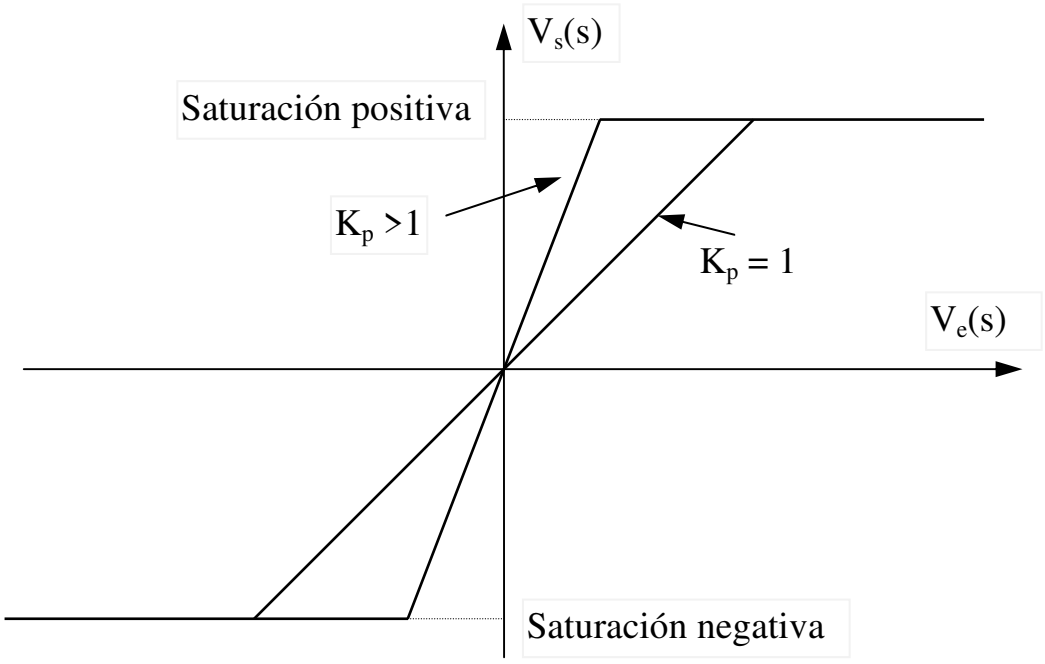
como $v_0 = 0$

$$\frac{v_e}{R_e} = \frac{v_s - v_e}{R_r}$$

Transformando se obtiene :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{R_e + R_r}{R_e} = K_p$$

La ganancia para este controlador es $K_p \geq 1$, como se puede apreciar en la siguiente gráfica



Controlador proporcional sumador.

En la fig. 3.6 se muestra un controlador proporcional que al mismo tiempo puede actuar como detector de error.

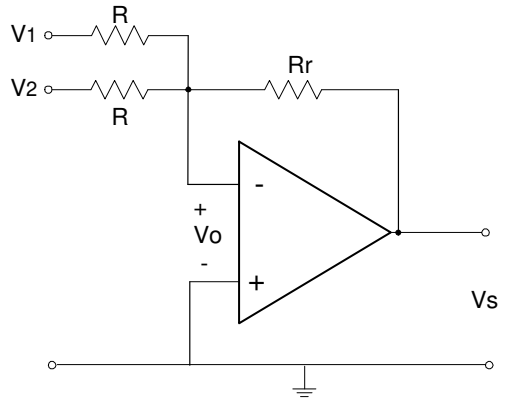


Fig.3.6. Controlador proporcional sumador.

Utilizando superposición

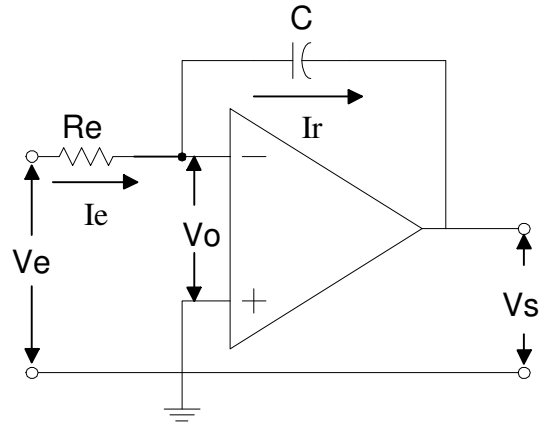
$$v_s = v_s^{'} + v_s^{''}$$

$$v_s^{'} = -\frac{R_r}{R} v_1 \quad ; \quad v_s^{''} = -\frac{R_r}{R} v_2$$

$$v_s = -\frac{R_r}{R}(v_1 + v_2)$$

para que esta ecuación se cumpla es necesario que las resistencias de entrada R sean iguales.

Controlador Integrador I.



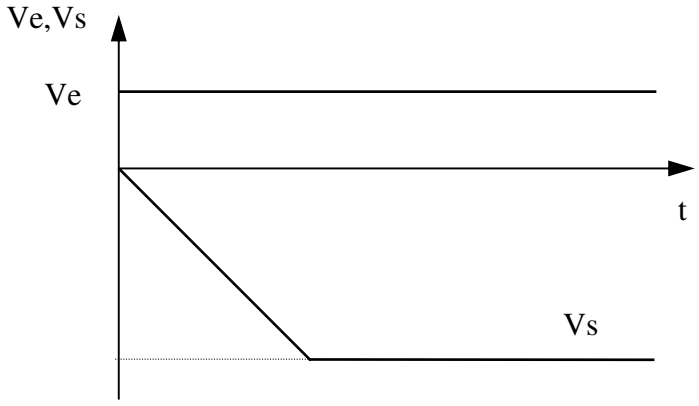
$$i_e = i_r$$

$$\frac{v_e - v_0}{R_e} = C\frac{dv_0}{dt} - C\frac{dv_s}{dt}$$

como $v_0 = 0$

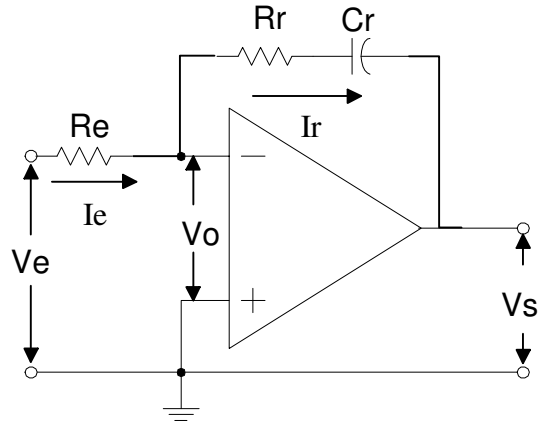
$$\frac{v_e}{R_e} = -C\frac{dv_s}{dt}$$; transformando a Laplace

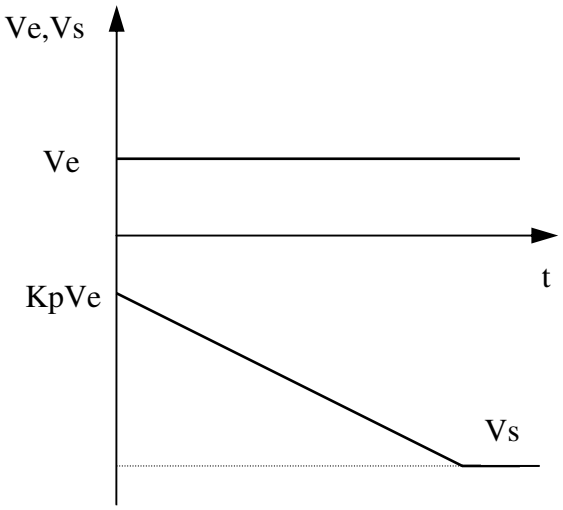
$$\frac{V_e(s)}{R_e} = -CsV_s(s) \quad ; \quad \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{1}{R_e Cs} = -\frac{1}{\tau_i s}$$



Respuesta ante un escalón

Controlador proporcional - integrador PI.





Respuesta ante un escalón

$i_e = i_r$

$V_0 = 0$

$$\frac{v_e}{R_e} = i_r \quad ; \quad v_s = -(i_r R_r + \frac{1}{C_r}\int i_r dt)$$

transformando a Laplace

$$\frac{V_e(s)}{R_e} = I_r(s) \quad ; \quad V_s(s) = -I_r(s)R_r - \frac{1}{C_r s} I_r(s)$$

$$I_r(s) = -\frac{V_s(s)C_r s}{R_r C_r s + 1}$$

$$\frac{V_e(s)}{R_e} = -\frac{V_s(s)C_r s}{R_r C_r s + 1} \quad ; \quad \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{R_r C_r s + 1}{R_e C_r s} = -\left(\frac{R_r}{R_e} + \frac{1}{R_e C_r s}\right)$$

dividiendo por $\frac{R_r}{R_e}$; $\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{R_r}{R_e}\left(1 + \frac{1}{R_r C_r s}\right) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)$

donde K_p = Ganancia proporcional

τ_i = Cte. de tiempo de integración

Controlador proporcional - derivativo PD.

$$i_e = i_r$$

$$\frac{v_e}{R_e} - \frac{v_0}{R_e} + C_e \frac{dv_e}{dt} - C_e \frac{dv_0}{dt} = \frac{v_0}{R_r} - \frac{v_s}{R_r}$$

como $v_0 = 0$

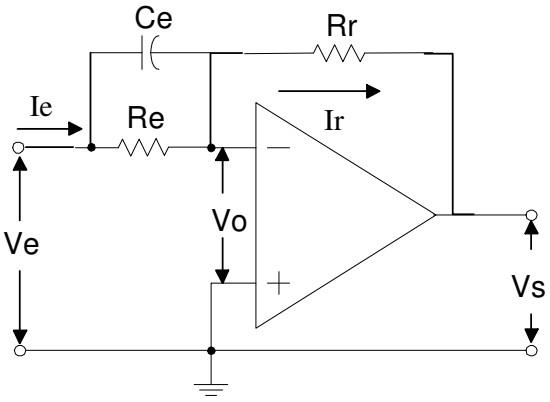
$$\frac{v_e}{R_e} + C_e \frac{dv_e}{dt} = -\frac{v_s}{R_r}$$

pasando a Laplace con C.I. iguales a cero

$$\frac{V_e(s)}{R_e} + C_e s V_e(s) = -\frac{V_s(s)}{R_r}$$

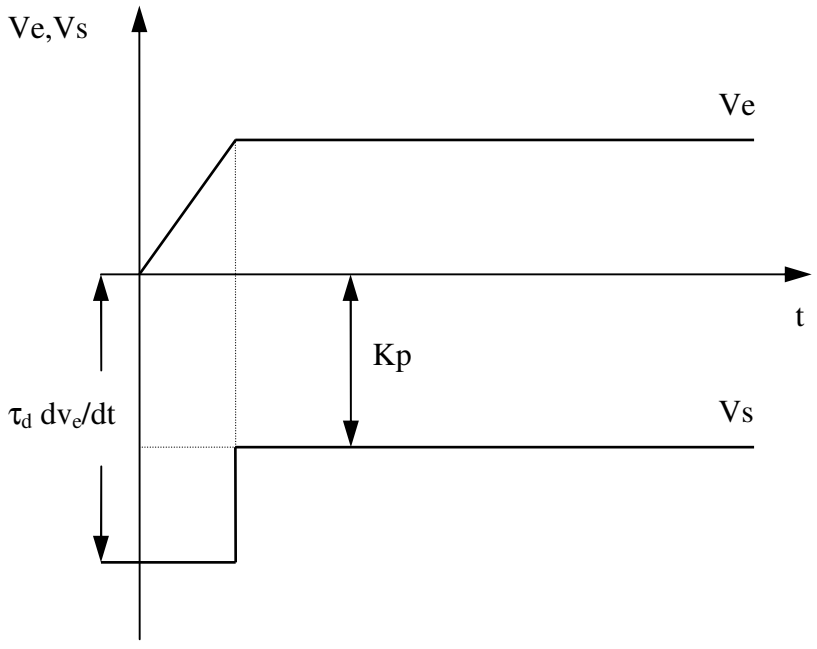
$$V_e(s)\left(\frac{1}{R_e} + C_e s\right) = -\frac{V_s(s)}{R_r}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{R_r}{R_e}\left(1 + R_e C_e s\right) = K_p(1 + \tau d s)$$



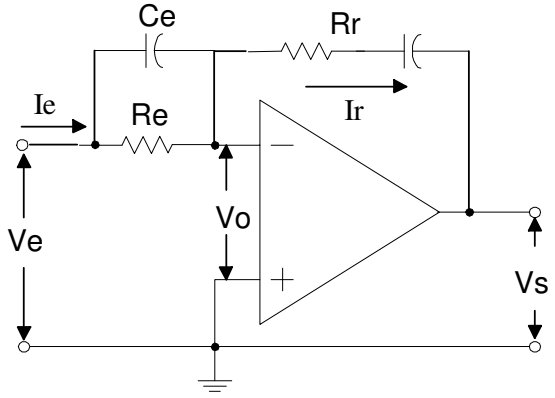
; donde K_p = Ganancia proporcional.

τd = Cte. de tiempo derivativa.



Respuesta del controlador

Controlador proporcional - integrador - derivativo PID.



$$i_e = i_r$$

$$\frac{v_e}{R_e} - \frac{v_0}{R_e} + C_e \frac{dv_e}{dt} - C_e \frac{dv_0}{dt} = i_r$$

$$v_s = -\left[i_r R_r + \frac{1}{C_r} \int i_r dt \right]$$

transformando a Laplace con C.I. iguales a cero y como $v_0 = 0$

$$\frac{V_e(s)}{R_e} + C_e s V_e(s) = I_r(s)$$

$$V_s(s) = -I_r(s)\left[R_r + \frac{1}{C_r s} \right] \; ; \; I_r(s) = -\frac{V_s(s) C_r s}{R_r C_r s + 1}$$

$$V_e(s)\left[\frac{1}{R_e} + C_e s \right] = -\frac{V_s(s) C_r s}{R_r C_r s + 1}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{(R_e C_e s + 1)(R_r C_r s + 1)}{R_e C_r s}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\left[\frac{R_r C_r s + R_e C_e s + 1 + R_e C_e R_r C_r s^2}{R_e C_r s} \right]$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\left[\frac{R_r}{R_e} + \frac{C_e}{C_r} + \frac{1}{R_e C_r s} + R_r C_e s \right]$$

multiplicando y dividiendo por $\frac{R_r}{R_e}$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{R_r}{R_e}\left[1 + \frac{C_e R_e}{C_r R_r} + \frac{1}{R_r C_r s} + R_e C_e s \right]$$

si $1 + \frac{C_e R_e}{C_r R_r} = \beta$; multiplicando y dividiendo por β

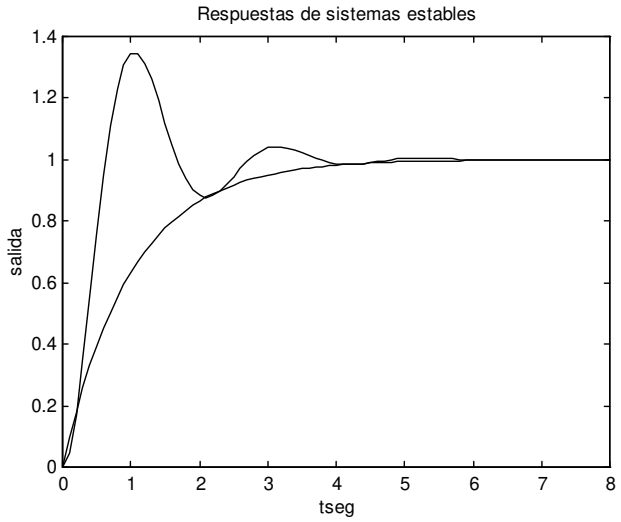
$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{R_r}{R_e}\beta\left[1 + \frac{1}{\beta R_r C_r s} + \frac{R_e C_e s}{\beta} \right]$$

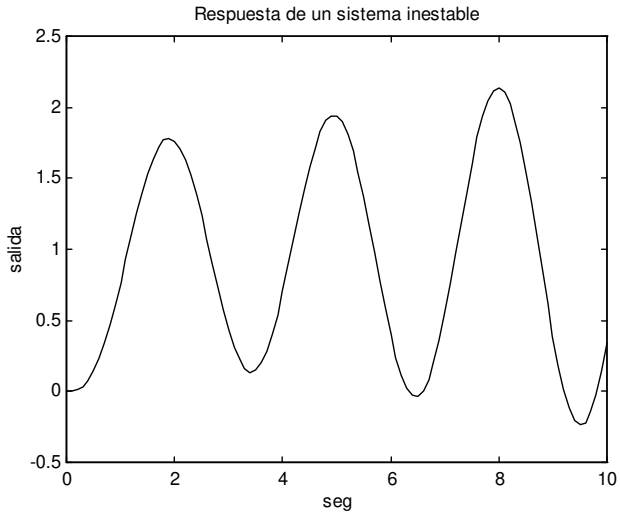
$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = K_p\left[1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right]$$

donde K_p = Ganancia proporcional.
τ_i = Cte. de tiempo de integración.
τ_d = Cte. de tiempo derivativo.

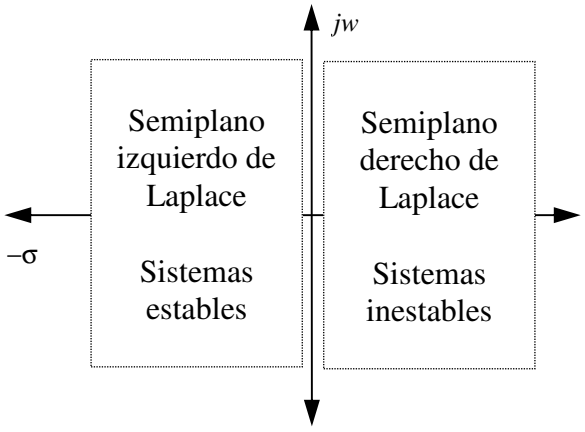
Criterio de estabilidad de Routh.

La estabilidad de un sistema de control esta basada en la relación que existe entre la salida y la entrada de referencia del sistema. Entre más parecidas sean estas dos señales el sistema será más estable, pero si la diferencia entre ellas es muy grande el sistema será inestable. En la siguientes figuras se muestra este concepto.





Tomando como referencia el plano de Laplace para determinar la estabilidad de un sistema de control utilizando la función de transferencia C(s)/R(s), un sistema sera estable si todas sus raíces se localizan en el semiplano izquierdo de Laplace. Si alguna de las raíces queda ubicada en el semiplano derecho de Laplace, el sistema será inestable. Si hay raíces sobre el eje imaginario, el sistema oscila permanentemente.



Cuando no se tienen las raíces del sistema, pero se cuenta con el polinomio característico de lazo cerrado, 1+G(s)H(s), se puede determinar la estabilidad del sistema utilizando el criterio de estabilidad de Routh.

Criterio de estabilidad de Routh.

El criterio de estabilidad de Routh nos dice si hay o no raíces positivas en una ecuación polinómica sin necesidad de resolverla.

Procedimiento.

1.- Escribir el polinomio en **s** en la forma siguiente :

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots a_{n-1} s + a_n = 0$

2.- Si cualquiera de los coeficientes es cero o negativo en la presencia de por lo menos un coeficiente positivo, hay una raíz o raíces que son imaginarias o que tienen parte real positiva. Por tanto en tal caso el sistema es inestable.

Es importante notar que la condición de que todos los coeficientes sean positivos no es suficiente para asegurar la estabilidad.

La condición necesaria pero no suficiente de estabilidad es que todos los coeficientes del polinomio estén presentes y que todos tengan signo positivo.

3.- Si todos los coeficientes son positivos, agrupar los coeficientes del polinomio en filas y columnas de acuerdo con el siguiente esquema :

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	.....
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	.....
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	.....
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	.....
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	.....
.	.	.			
.	.	.			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \; ; \; b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \; ; \; b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \; ; \; c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \; ; \; d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

etc.

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces del polinomio queden en el semiplano izquierdo de Laplace, es que todos los coeficientes sean positivos y que todos los términos en la primera columna del conjunto tengan signo positivo.

Ejemplos :

Para los siguientes polinomios determinar si hay o no raíces en el semiplano derecho de Laplace.

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

s^4	1	3	5	Hay dos cambios de signo
s^3	2	4	0	por lo tanto hay dos raíces en
s^2	1	5		el semiplano derecho.
s^1	-6	0		(Sistema inestable)
s^0	5			

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

s^4	2	3	10	Hay dos cambios de signo
s^3	1	5	0	por lo tanto existen dos raíces
s^2	-7	10	0	en el semiplano derecho.
s^1	6.43	0	0	(Sistema inestable)
s^0	10			

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 2 = 0$$

s^3	1	4	No hay cambios de signo
s^2	2	2	por lo tanto todas las raíces
s^1	3	0	se encuentran en el semiplano
s^0	2		izquierdo. (Sistema estable)

Selección de un controlador.

Para seleccionar el controlador adecuado a las necesidades de funcionamiento del sistema de control, es necesario tomar en cuenta :

a) Tipo de perturbaciones que afectarán al sistema.

b) Si se puede aceptar o no errores y en que porcentaje.

El siguiente paso es hacer un diagrama de bloques en el cual se incluya el controlador y la perturbación, como se muestra en la Fig. 3.7.

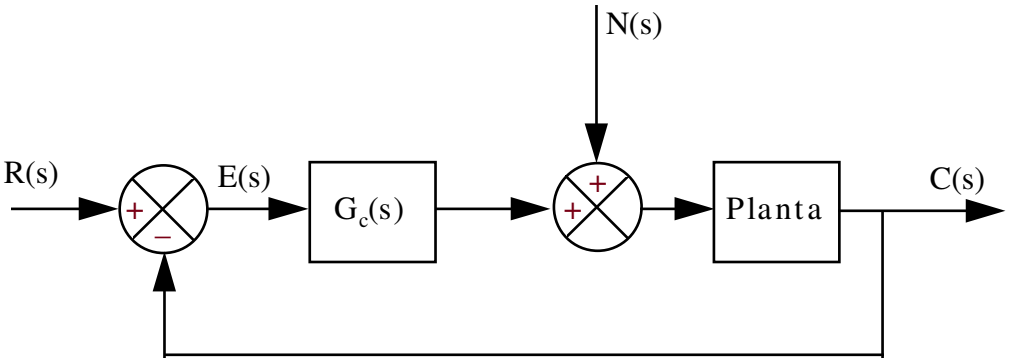
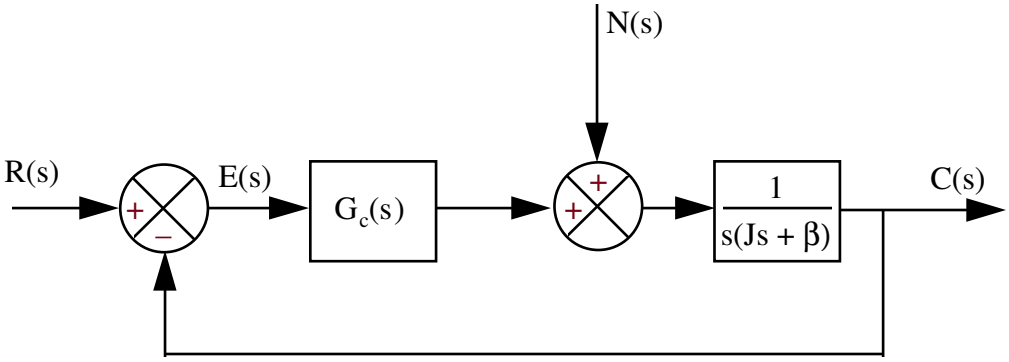


Fig. 3.7. Diagrama de bloques para selección de un controlador.

Ejemplos

1.- Encontrar el tipo de controlador necesario para obtener un $\mathbf{e_{ss} = 0}$, si el sistema de control tiene como planta $G(s) = 1/s(Js + \beta)$ y realimentación unitaria. La entrada R(s) y la perturbación son del tipo escalón unitario.



Condiciones para la selección del controlador.
$e_{ss} = 0$
R(s) = 1/s ; N(s) = 1/s

Ya que el sistema de control está sujeto a dos señales de entrada, para simplificar el análisis supongamos que la entrada de referencia R(s) = 0, y en seguida se obtiene la función de transferencia C(s) / N(s).

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\dfrac{1}{s(Js+\beta)}}{1+\dfrac{1}{s(Js+\beta)}G_c(s)} = \frac{1}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$

como $C(s) = -E(s)$

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{1}{Js_2+\beta s+G_c(s)}$$

Que es la función de transferencia que relaciona el error con la señal de perturbación.

$$E(s) = -\frac{N(s)}{Js_2+\beta s+G_c(s)} \quad ; \quad \mathrm{N(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$E(s) = -\frac{1}{s\left[Js^2+\beta s+G_c(s)\right]}$$

Aplicando el teorema del valor final, ya que el error en estado estable $\mathbf{e_{ss}}$ ocurre cuando $t \to \infty$, se tiene que

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left\{-\frac{1}{s\left[Js^2+\beta s+G_c(s)\right]}\right\}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{G_c(s)}\right]$$

Si $G_c(s) = K_p$; controlador proporcional

$e_{ss} = -\frac{1}{K_p}$; se tiene un error que depende de K_p

Si $G_c(s) = \frac{K_i}{s}$; controlador integrador

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{\frac{K_i}{s}}\right] = 0$$

Para tomar este resultado como confiable, es necesario analizar la ecuación característica de lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + \beta s + \frac{K_i}{s}} = \frac{s}{Js^3 + \beta s^2 + K_i}$$

la ecuación característica es de tercer orden y se puede observar que no esta completa , ya que le falta el coeficiente en **S** , por lo tanto este sistema es inestable.

si $G(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)$; controlador PI

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)}\right] = 0$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + \beta s + K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)} = \frac{\tau_i s}{\tau_i Js^3 + \beta\tau_i s^2 + \tau_i K_p s + K_p}$$

Esta ecuación contiene todos los coeficientes, por consiguiente este sistema puede ser estable si se calculan adecuadamente los parámetros del controlador.

Si $G_c(s) = k_p(1+\tau ds)$; controlador PD

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{K_p(1+\tau_d s)}\right] = -\frac{1}{K_p}$$; se obtiene un error que depende de K_p

Si $G_c(s) = K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}+\tau_d s\right)$; controlador PID

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}+\tau_d s\right)}\right] = 0$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2+\beta s+K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}+\tau_d s\right)}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\tau_i s}{\tau_i Js^3+\left(\beta+\tau_d\right)\tau_i s^2+K_p\tau_i s+K_p}$$

La ecuación característica contiene todos los coeficientes y todos los signos son positivos, por lo tanto esta ecuación puede ser estable.

Para este sistema de control, tanto el controlador PI. como el PID. cumplen con las condiciones de selección.

Analizando las ecuaciones características de ambos controladores se puede apreciar que es más sencilla la del controlador PI. , ya que hay únicamente dos incógnitas τ_i y K_p , mientras que para el controlador PID. son tres τ_i , τ_d y K_p . Por lo tanto es más fácil sintonizar un controlador PI.

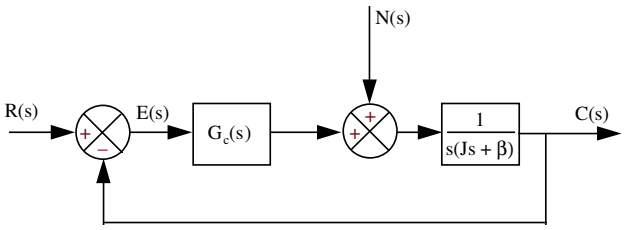
2.- Para el sistema de control del ejemplo anterior determinar :

a) La salida en estado estable C_{ss} si el sistema tiene una entrada de referencia R(s) = 0 y un escalón unitario de perturbación N(s) = 1/s.

b) La salida en estado estable C_{ss} si R(s) =1/s y N(s) =1/s, para los controladores **P** y **PI**.

a) Entrada de referencia R(s) = 0

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{s(Js+\beta)}}{1+\frac{1}{s(Js+\beta)}G_c(s)} = \frac{1}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$



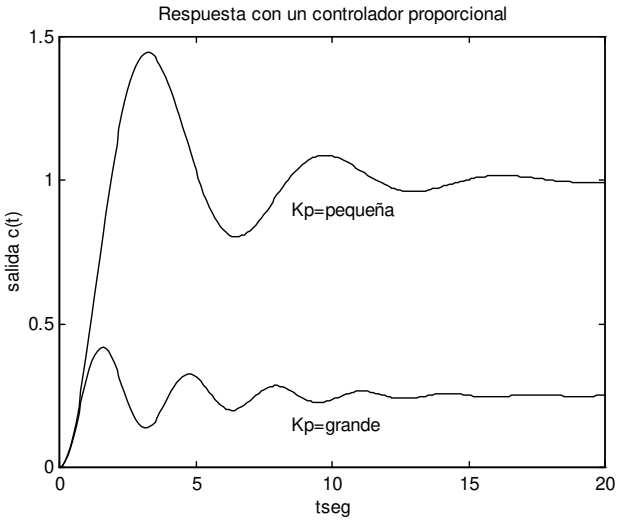
Controlador proporcional K_p, $N(s) = \frac{1}{s}$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2+\beta s+K_p}$$

$$C(s) = \frac{N(s)}{Js^2+\beta s+K_p} = \frac{1}{s\left(Js^2+\beta s+K_p\right)}$$

Aplicando el teorma del valor final

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s\left(Js^2+\beta s+K_p\right)}\right] = \frac{1}{K_p}$$



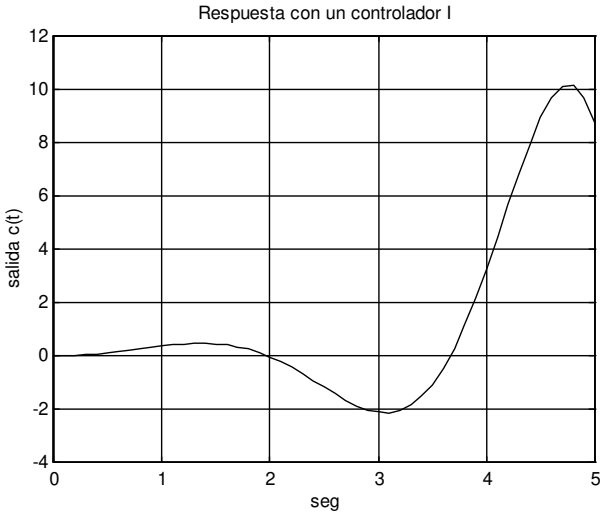
en la gráfica se puede apreciar el error que existe entre la señal de salida y la señal de entrada. Como r(t) = 0, el error depende del valor de la ganancia K_p.

<u>Controlador integrador I</u>, N(s) = 1/s

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2+\beta s+\frac{K_i}{s}} = \frac{s}{Js^3+\beta s^2+K_i}$$

$$C(s) = \frac{s}{s\left(Js^3+\beta s^2+K_i\right)} = \frac{1}{Js^3+\beta s^2+K_i}$$

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{Js^3+\beta s^2+K_i}\right] = 0$$



Utilizando un controlador integrador, la señal de salida tiene un comportamiento oscilatorio creciente, por lo que el error se incrementará conforme aumente el tiempo.

Controlador PI, N(s) = 1/s

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + \beta s + K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)} = \frac{\tau_i s}{\tau_i Js^3 + \beta\tau_i s^2 + \tau_i K_p s + K_p}$$

$$C(s) = \frac{\tau_i s}{s\left(\tau_i Js^3 + \beta\tau_i s^2 + \tau_i K_p s + K_p\right)} = \frac{\tau_i}{\tau_i Js^3 + \beta\tau_i s^2 + \tau_i K_p s + K_p}$$

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{\tau_i}{\tau_i Js^3 + \beta\tau_i s^2 + \tau_i K_p s + K_p}\right] = 0$$

Controlador PD, N(s) = 1/s

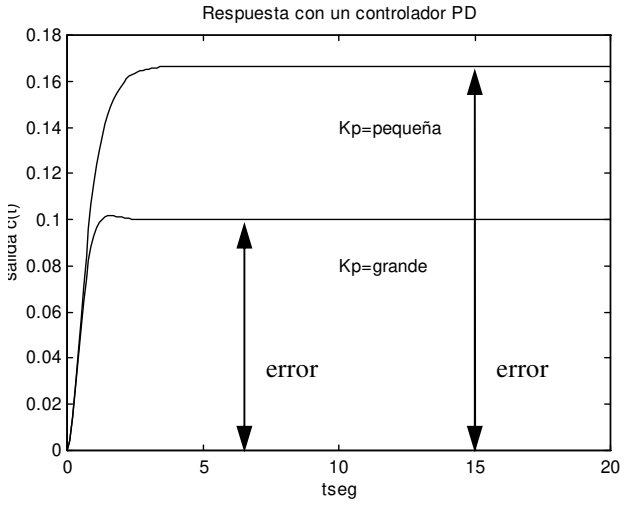
$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + \beta s + K_p\left(1 + \tau_d s\right)} = \frac{1}{Js^2 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)s + K_p}$$

$$C(s) = \frac{N(s)}{Js^2 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)s + K_p} = \frac{1}{s\left[Js^2 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)s + K_p\right]}$$

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left\{\frac{1}{s\left[Js^2 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)s + K_p\right]}\right\} = \frac{1}{K_p}$$

Con un controlador PI la señal de salida c(t) se iguala a la señal de entrada r(t), debido a que este tipo de controlador corrige el error. En cambio, cuando se utiliza un controlador PD la señal de salida presenta un error que depende de K_p.

PI

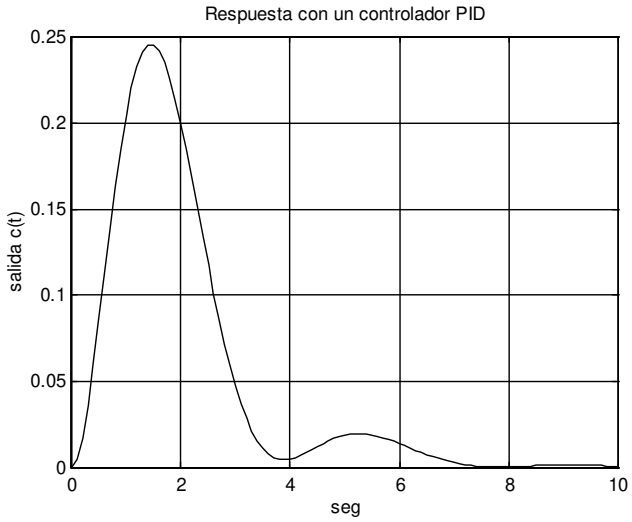


Controlador PID, N(s) = 1/s

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + \beta s + K_p\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)} = \frac{\tau_i s}{\tau_i Js^3 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)\tau_i s^2 + K_p \tau_i s + K_p}$$

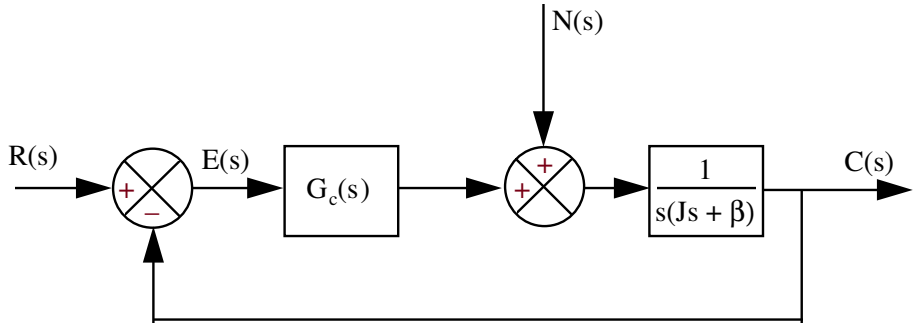
$$C(s) = \frac{\tau_i s}{s\left[\tau_i Js^3 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)\tau_i s^2 + K_p \tau_i s + K_p\right]} = \frac{\tau_i}{\tau_i Js^3 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)\tau_i s^2 + K_p \tau_i s + K_p}$$

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{\tau_i}{\tau_i Js^3 + \left(\beta + \tau_d K_p\right)\tau_i s^2 + K_p \tau_i s + K_p}\right] = 0$$



En esta gráfica se puede observar que la señal de salida c(t) alcanza a la señal de entrada r(t) = 0 , por lo que el error en estado estable es igual a cero.

b) Debido a que el sistema tiene dos entradas y una salida, es necesario utilizar el teorema de superposición.



C(s) = C'(s) + C''(s)
con N(s) = 0

$$\frac{C'(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{G_c(s)}{s(Js+\beta)}}{1+\dfrac{G_c(s)}{s(Js+\beta)}} = \frac{G_c(s)}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$

$$C'(s) = \frac{R(s)G_c(s)}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$

con R(s) = 0 ;

$$\frac{C''(s)}{N(s)} = \frac{\dfrac{1}{s(Js+\beta)}}{1+\dfrac{1}{s(Js+\beta)}G_c(s)} = \frac{1}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$

$$C''(s) = \frac{N(s)}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$

$$C(s) = \frac{R(s)G_c(s)+N(s)}{Js^2+\beta s+G_c(s)}$$

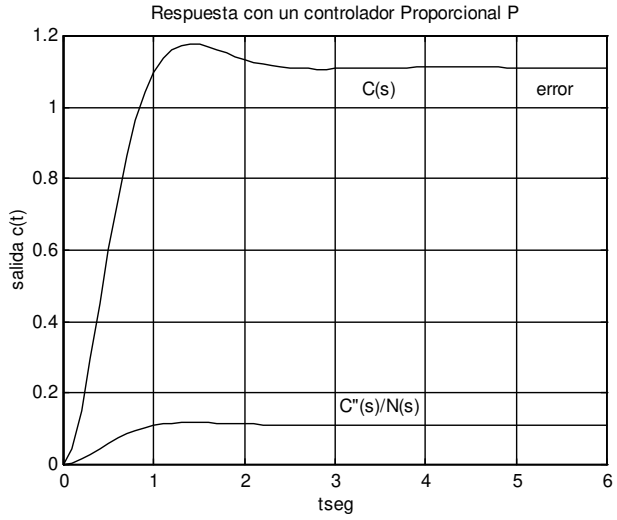
Si se utiliza un controlador proporcional Kp y se aplican las señales de entrada y la perturbación ; $G_c(s) = Kp$, $R(s) = 1/s$, $N(s) = 1/s$;

$$C(s) = \frac{\left(\frac{1}{s}\right)K_p+\frac{1}{s}}{Js^2+\beta s+K_p}$$

Aplicando el teorema del valor final

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{\left(\frac{1}{s}\right)K_p+\frac{1}{s}}{Js^2+\beta s+K_p}\right] = 1+\frac{1}{K_p}$$

donde $\frac{1}{K_p}$ es el error.

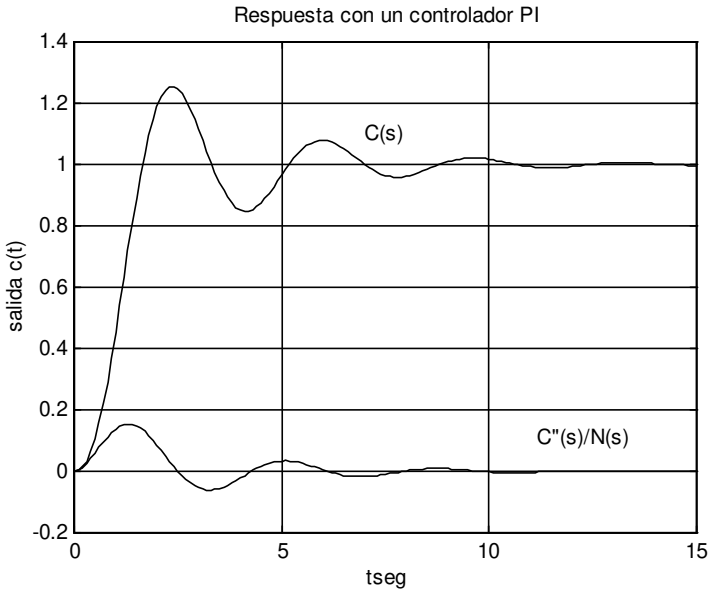


En ésta Gráfica se muestran la respuesta en el tiempo de la salida del sistema con respecto a la señal de perturbación, C"(s)/N(s), y la respuesta del sistema ante un escalón de entrada y un escalón de perturbación, C(s).

Con un controlador PI, $G_c(s) = K_p(1+ 1/\tau_i s)$, R(s) = 1/s, N(s) = 1/s

$$C(s) = \frac{\left(\frac{1}{s}\right)K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)+\frac{1}{s}}{Js^2+\beta s+K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)} = \frac{K_p\left(\tau_i s+1\right)+\tau_i s}{s\left(\tau_i Js^3+\tau_i \beta s^2+\tau_i K_p s+K_p\right)}$$

$$C_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{K_p\left(\tau_i s+1\right)+\tau_i s}{s\left(\tau_i Js^3+\tau_i \beta s^2+\tau_i K_p s+K_p\right)}\right] = \frac{K_p}{K_p} = 1$$



En ésta gráfica se pueden observar las respuestas del sistema de control ante señales del tipo escalón unitario, tanto en la entrada R(s) como en la perturbación N(s). C(s) es la ecuación en Laplace de la salida, y C"(s)/N(s) es la función de transferencia que relaciona la salida con la señal de perturbación.

En la gráfica se puede apreciar como el controlador PI es el apropiado para eliminar

las perturbaciones del tipo escalón aplicadas a este sistema, ya que la señal de salida se estabiliza en el valor de la entrada r(t) = 1.

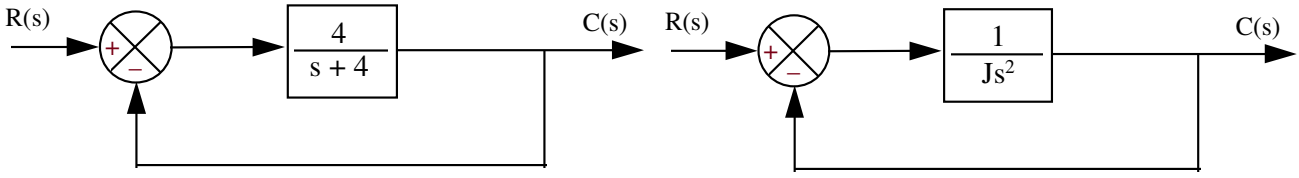
La respuesta del sistema con respecto a la perturbación, C"(s)/N(s) con una entrada cero, se estabiliza sobre cero ya que el controlador PI se encarga de eliminar la perturbación.

Ejercicios de tarea.

1.- Para los siguientes sistemas de control con realimentación unitaria encontrar :

a) Tipo de controlador para obtener $\mathbf{e_{ss}} = 0$, si R(s) = R/s y la perturbación N(s) = N/s

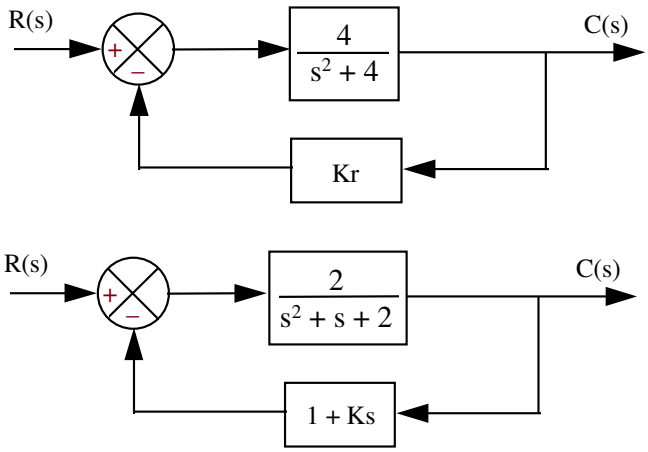
b) Con el controlador obtenido en el inciso anterior obtener $\mathbf{c_{ss}}$, si la entrada R(s) = R/s y la perturbación N(s) = N/s.



2.- Para los siguientes sistemas de control con realimentación no unitaria encontrar :

a) El tipo de controlador para obtener $\mathbf{e_{ss}} = 0$ si R(s) = 10/s y la perturbación N(s) = 5/s.

b) Con el controlador obtenido en el inciso anterior , determinar $\mathbf{c_{ss}}$ si la entrada R(s) = 10/s y la perturbación es N(s) = 5/s.



Unidad 4
Respuesta Transitoria.

4.1 Introducción.

Respuesta transitoria y respuesta estacionaria. La respuesta temporal de un sistema de control consiste en dos partes : la respuesta transitoria y la estacionaria. Por respuesta transitoria se entiende aquella que va desde el estado inicial al estado final. Por respuesta estacionaria se entiende la forma en la que la salida del sistema se comporta cuando *t* tiende a infinito.

En la Fig.4.1 se muestra la respuesta c(t) de un sistema ante un escalón unitario de entrada r(t).

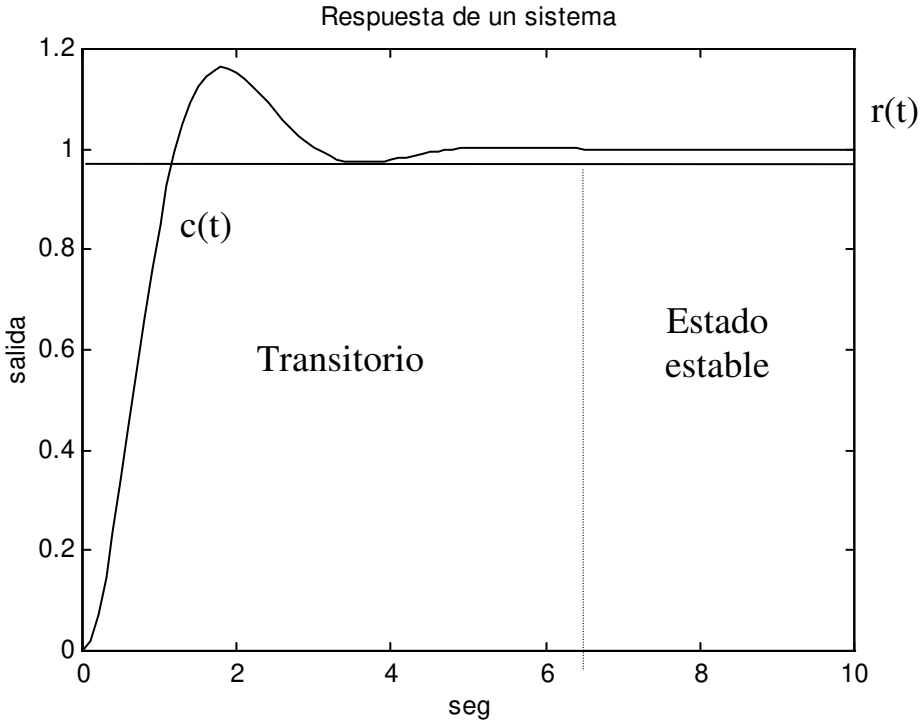


Fig.4.1 Respuesta temporal de un sistema.

4.2 Sistemas de primer orden.

La función de transferencia C(s)/R(s) del diagrama de bloques de la Fig.4.2 es la de un sistema de primer orden representada en forma general.

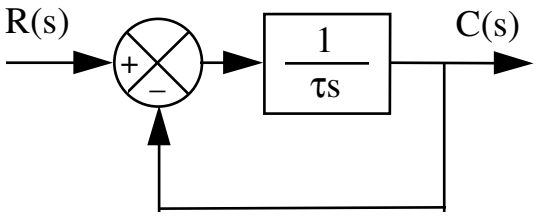


Fig.4.2 Diagrama de bloques de un sistema de primer orden.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{\tau s}}{1+\frac{1}{\tau s}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

donde C(s)/R(s) es la función de de transferencia general de primer orden.

Respuesta al escalón unitario en un sistema de primer orden.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \quad ; \quad \text{si} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = \frac{R(s)}{\tau s + 1} = \frac{1}{s(\tau s + 1)} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

Resolviendo por fracciones parciales ;

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} \qquad A = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = 1 \qquad B = \lim_{s \to 0} \frac{\frac{1}{\tau}}{s} = -1$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

si t = 0 c (t = 0) = 0
t = τ c (t = τ) = 0.632
t = ∞ c (t = ∞) = 1

La respuesta de un sistema de primer orden a un escalón de entrada se muestra en la Fig.4.3 , en la cual se puede observar que al 63.2 % del total de la salida $t = \tau$, y que cuatro veces la constante de tiempo (4τ) la señal de salida c(t) alcanza el 98.2 % del valor final. Por lo tanto, las características más importantes de respuesta temporal para un sistema de primer orden son :

1) Que cuando $t = \tau$ la salida alcanza el 63.2 % del valor final.
2) El sistema se estabiliza después de cuatro constantes de tiempo (4τ) , aceptando un error aproximado del 2 %.
3) La respuesta temporal de todo sistema de primer orden ante un escalón de entrada, es del tipo exponencial creciente.
4) El error en estado estable es cero. $e_{ss}(t = \infty) = r (t = \infty) - c (t = \infty)$ $e_{ss} = 1 - 1 = 0$.

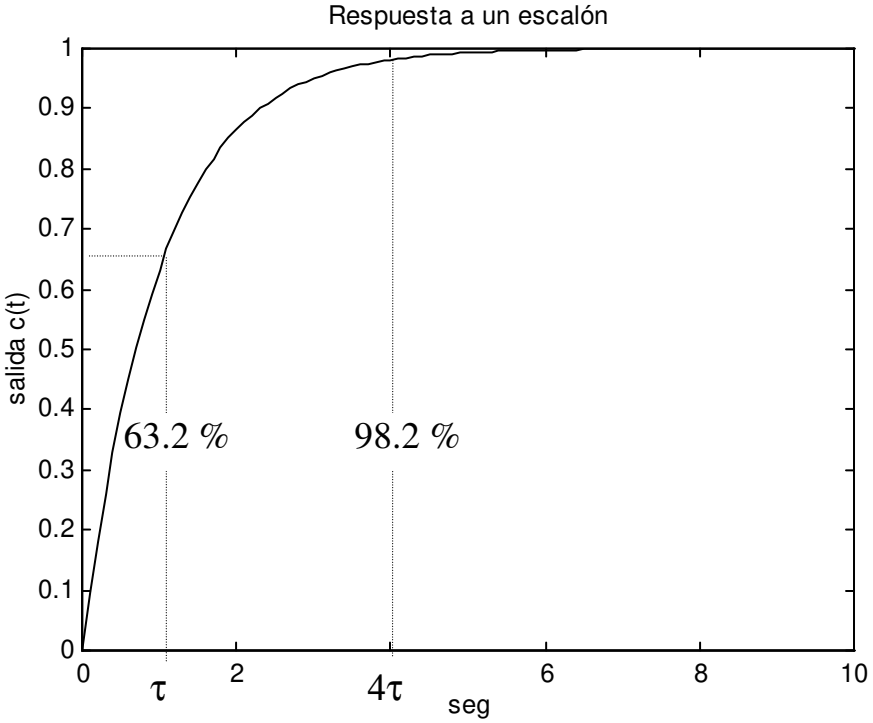


Fig.4.3 Respuesta de un sistema de primer orden a un escalón

Respuesta a una rampa unitaria en sistemas de primer orden.

En la Fig.4.4 se muestra la gráfica de la respuesta ante una rampa unitaria del sistema de primer orden que se desarrolla a continuación.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad ; \quad \text{si } R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{\frac{1}{\tau}}{s^2\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$A = \lim_{s \to 0}\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}\right] = 1 \qquad B = \lim_{s \to 0}\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} - \frac{1}{s}\right] = -\tau \qquad C = \lim_{s \to -\frac{1}{\tau}}\left[\frac{\frac{1}{\tau}}{s^2}\right] = \tau$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$c(t) = t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$$

si $t = 0$ $\quad c(t=0) = 0$

$t = \tau$ $\quad c(t=\tau) = 0.368\,\tau$

$t = \infty$ $\quad c(t=\infty) = \infty$

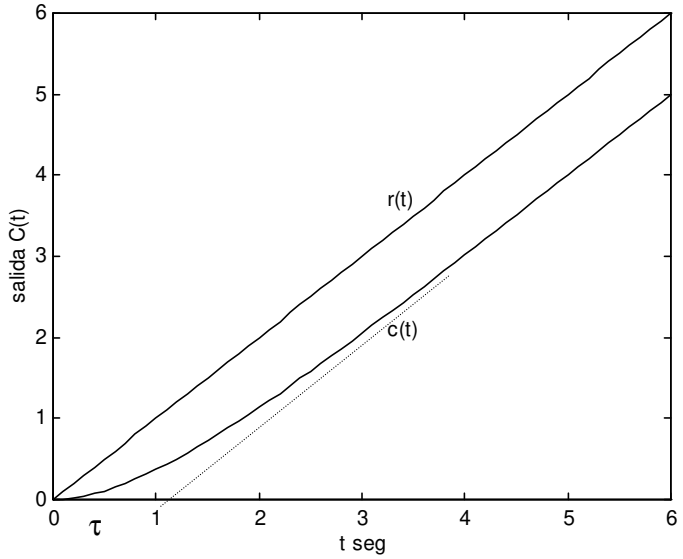


Fig.4.4 Respuesta a una rampa unitaria por un sistema de primer orden.

En la Fig.4.4 se pueden apreciar las componentes rampa y exponencial creciente de la señal de salida c(t). La salida c(t) sigue a la entrada r(t) con un error que depende de τ .

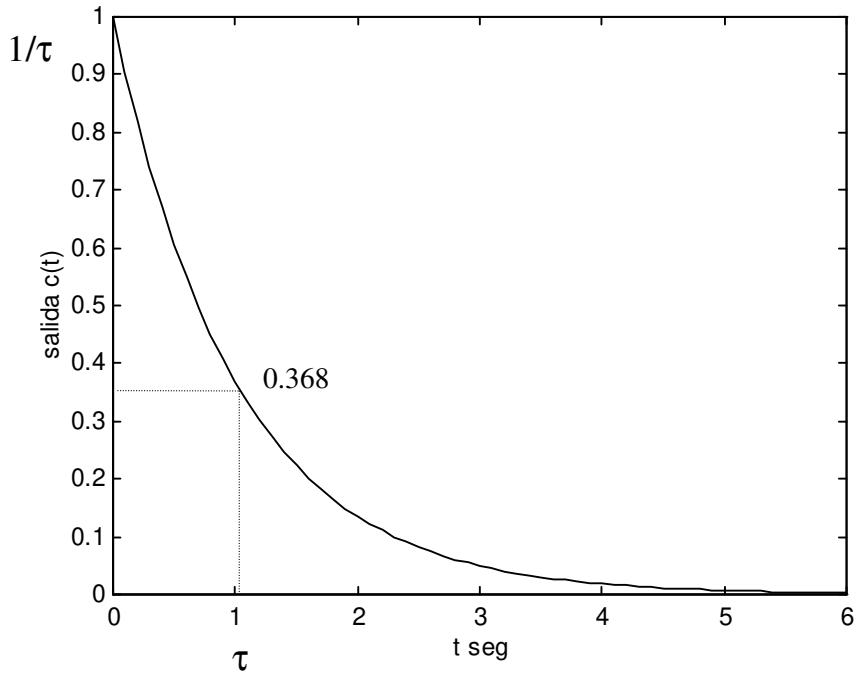
$e(t) = r(t) - c(t)$

$e(t) = t - t + \tau - \tau e^{-t/\tau}$

$e(t) = \tau (1 - e^{-t/\tau})$; si $t = \infty$ $e(\infty) = \tau$

Respuesta a un impulso unitario de sistemas de primer orden.

La siguiente gráfica representa la respuesta de un sistema de primer orden a un impulso unitario.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad ; \text{ si } R(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$c(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

si ; $t = 0$ $c(t = 0) = 1/\tau$; $t = \tau$ $c(t = \tau) = (1/t)0.368$; $t = \infty$ $c(t = \infty) = 0$.

La respuesta de un sistema de primer orden a un impulso unitario tiene las siguientes características : En $t = 0$ la señal de salida parte de un valor máximo $1/\tau$, en

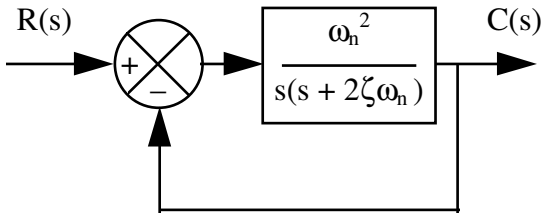
$t = \tau$ la salida tiene el 36.8% del valor final. En este tipo de respuesta el error es cero, ya que:

$e(t) = r(t) - c(t)$; evaluando en $t = \infty$; $e_{ss} = 0 - 0 = 0$.

4.3 Sistemas de segundo orden.

Respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón de entrada.

El siguiente diagrama de bloques representa en forma general un sistema de segundo orden. En donde ω_n es la frecuencia natural no amortiguada y ζ el coeficiente de amortiguamiento.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{\omega_n^2}{s\left(s+2\zeta\omega_n\right)}}{1+\dfrac{\omega_n^2}{s\left(s+2\zeta\omega_n\right)}} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

La ecuación característica de lazo cerrado es :

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Como la ecuación es de segundo orden, para hacer un análisis del tipo de respuestas que se pueden obtener la representaremos en forma de raíces.

Como se puede observar en las siguientes ecuaciones, las raíces dependen principalmente del valor de ζ , por esta razón la respuesta de un sistema de segundo orden se analiza tomando en cuenta este parámetro y las raíces del sistema.

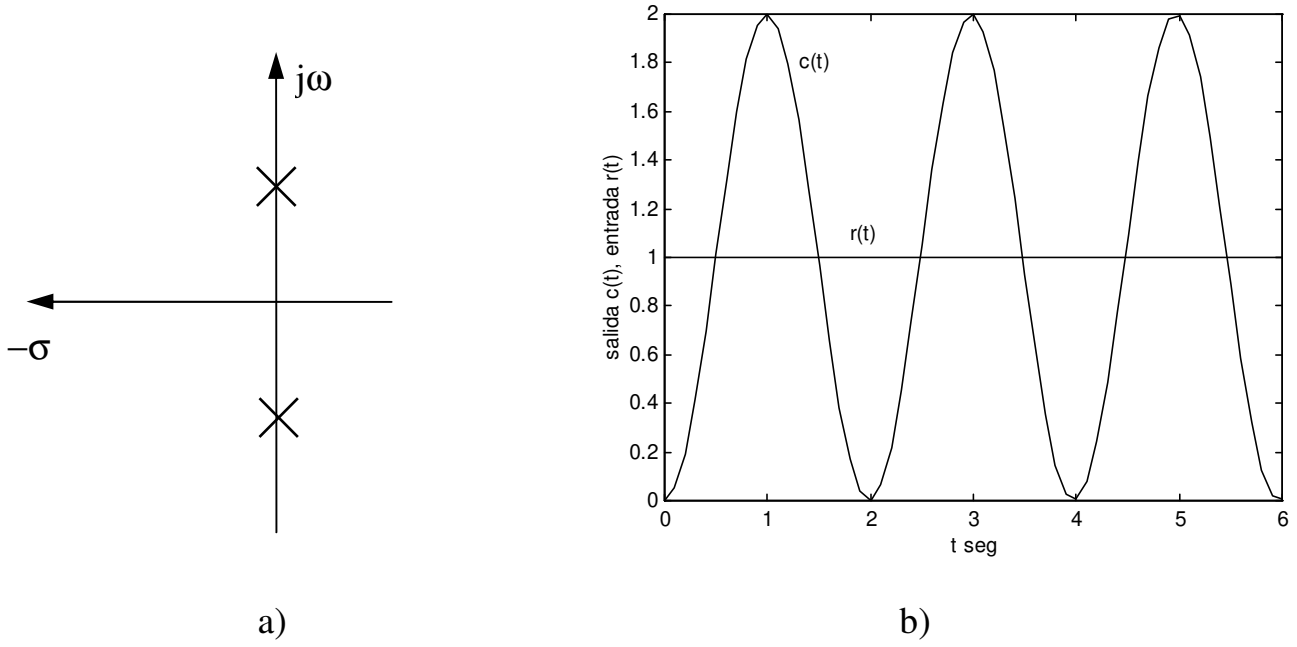
$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Con $\zeta = 0$; $$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}$$

La ecuación característica tiene raíces imaginarias en $s_{1,2} = \pm j\omega$.
Como a la ecuación característica le falta el coeficiente en **s** este sistema es inestable, por lo que presentará una respuesta oscilatoria.

En la Fig.4.5a estan representadas las raíces en el plano de Laplace, y en la Fig.4.5b la respuesta del sistema a un escalón de entrada.



a) b)

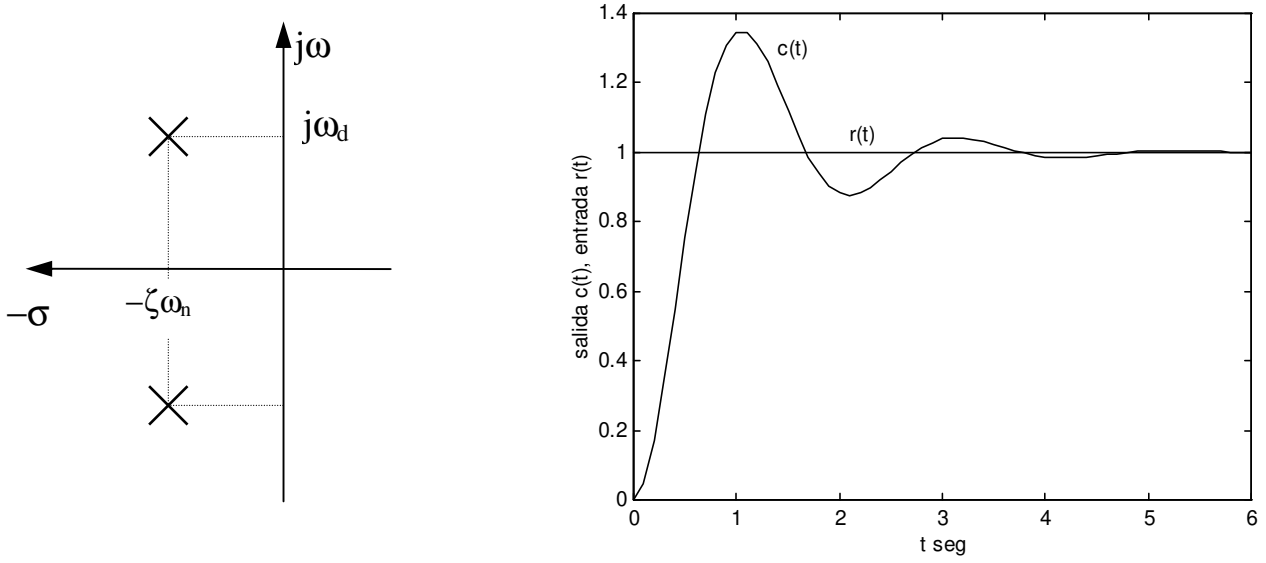
Fig.4.5 a) Ubicación de las raíces en el plano de Laplace. b) Respuesta del sistema a un escalón.

Con $0 < \zeta < 1$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$; frecuencia natural amortiguada.

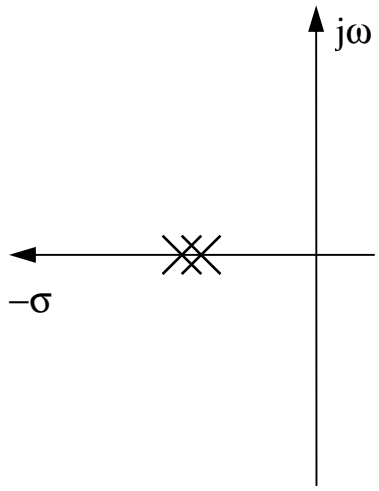
Las raíces son complejas conjugadas con parte real $-\zeta\omega_n$. La posición de las raíces y la respuesta del sistema a un escalón se pueden ver en las siguientes gráficas.

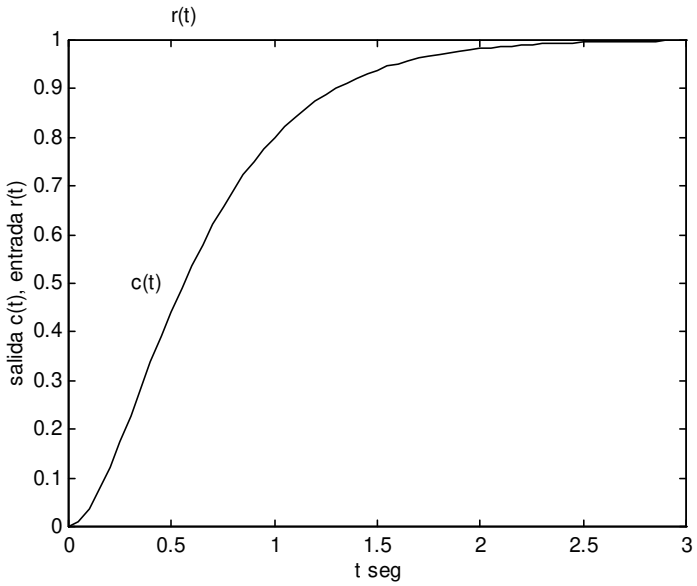


Con $\zeta = 1$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \omega_n\right)^2}$$

Las raíces son reales repetidas $s_{1,2} = -\omega_n$. La ubicación de las raíces y la respuesta a un escalón se muestran a continuación.



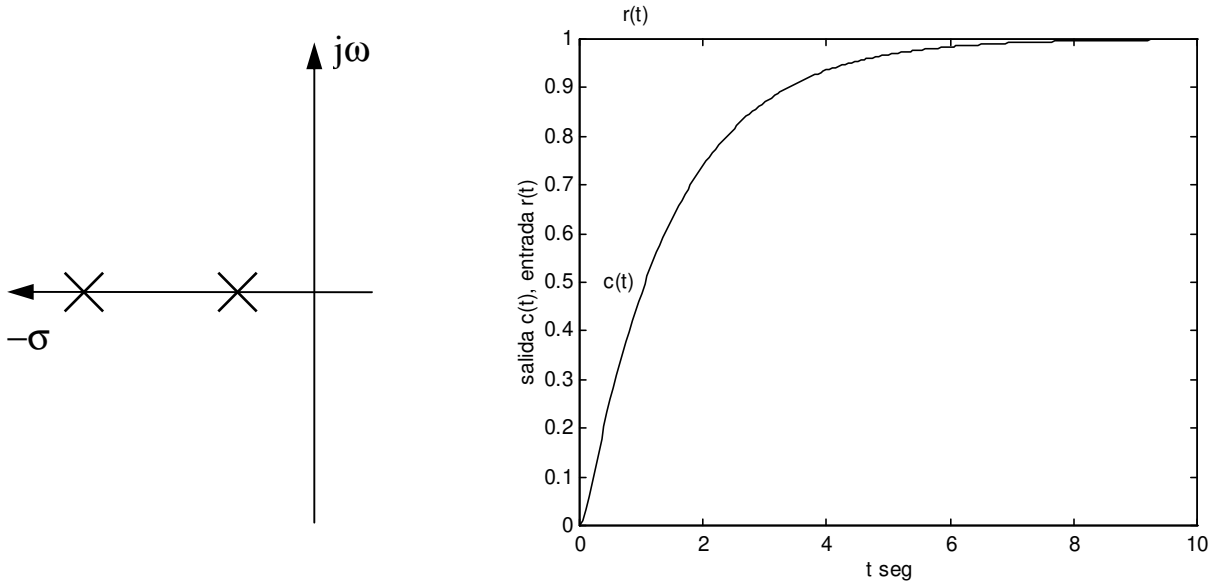


Con $\zeta > 1$.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

Las raíces de la ecuación característica de lazo cerrado son reales diferentes.

La posición de las raíces en el plano de Laplace y la respuesta del sistema a un escalón de entrada son representadas en la Fig.4.6a y b.



a) b)

Fig.4.7 a) raíces reales diferentes. b) Respuesta a un escalón de entrada.

Caso Subamortiguado. $\mathbf{0 < \zeta < 1}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\left(s + \zeta\omega_n + j\omega_d\right)\left(s + \zeta\omega_n - j\omega_d\right)}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ = frecuencia natural amortiguada

si $R(s) = \frac{1}{s}$; $C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

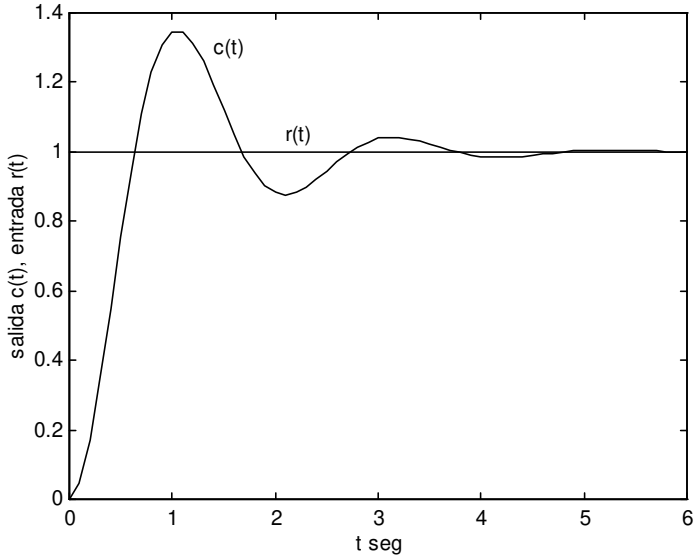
completando el trinomio se tiene :

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2} - \frac{\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\left(s + \zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_d t$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t\right)$$



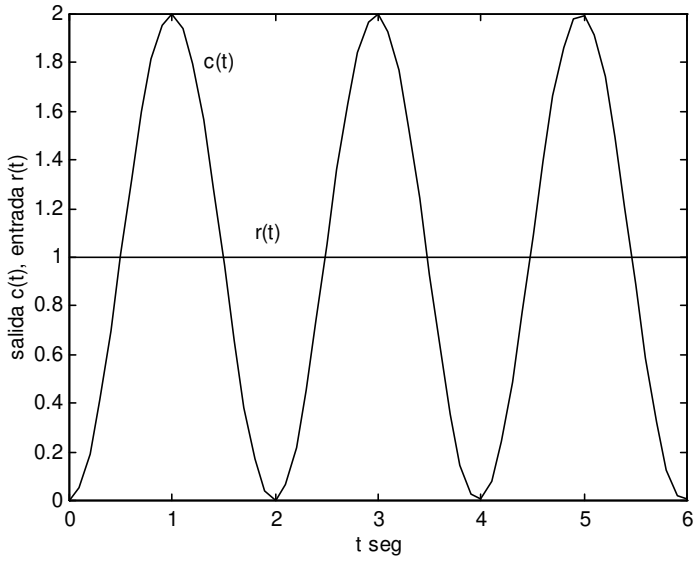
La gráfica muestra la respuesta del sistema a un escalón unitario de entrada con un coeficiente de fricción viscosa entre cero y uno $\mathbf{0 < \zeta < 1}$. Se puede apreciar que la respuesta c(t) despues del transitorio se estabiliza al valor de la referencia de entrada r(t).

<u>Caso oscilatorio.</u> $\zeta = 0$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

si $\zeta = 0$

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t$$



Esta gráfica representa la respuesta temporal del sistema ante un escalón de entrada y con un valor de $\zeta = 0$, se puede observar que la respuesta es oscilatoria por lo que el sistema es inestable para este valor de coeficiente de amortiguamiento.

Caso criticamente amortiguado. $\zeta = 1$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2\right)} = \frac{\omega_n^2}{s\left(s + \omega_n\right)^2}$$

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{\left(s + \omega_n\right)^2} + \frac{C}{s + \omega_n}$$

; resolviendo por fracciones parciales :

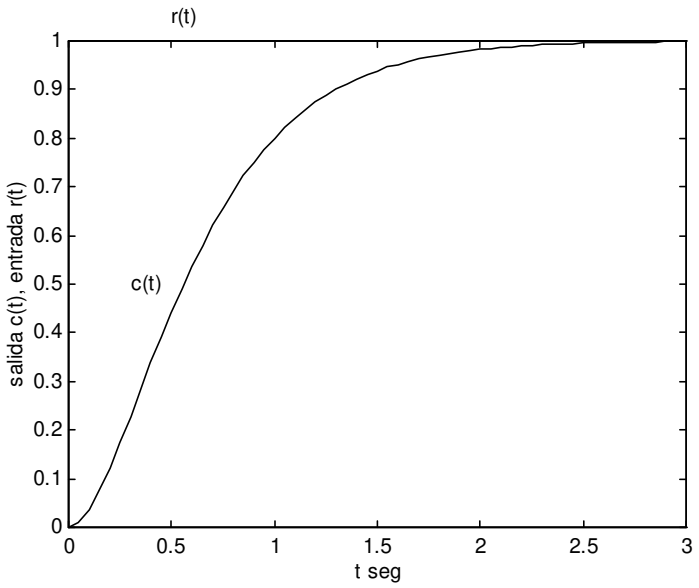
$$A = \left[\frac{\omega_n^2}{\left(s+\omega_n\right)^2}\right]_{s\to 0} = 1 \; ; \; B = \left(\frac{\omega_n^2}{s}\right)_{s\to -\omega_n} = -\omega_n$$

$$C = \frac{d}{ds}\left(\frac{\omega_n^2}{s}\right)_{s\to -\omega_n} = -1$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{\left(s+\omega_n\right)^2} - \frac{1}{s+\omega_n}$$

$$c(t) = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}\left(1 + \omega_n t\right)$$



En la siguiente gráfica se representa la respuesta del sistema a un escalón de entrada con un coeficiente de fricción igual a uno , $\zeta = 1$. Se puede observar que la salida c(t) alcanza a la señal de entrada r(t) con un error en estado estable igual a cero.

Caso sobreamortiguado. $\zeta > 1$

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$ por fracciones parciales :

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{C}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

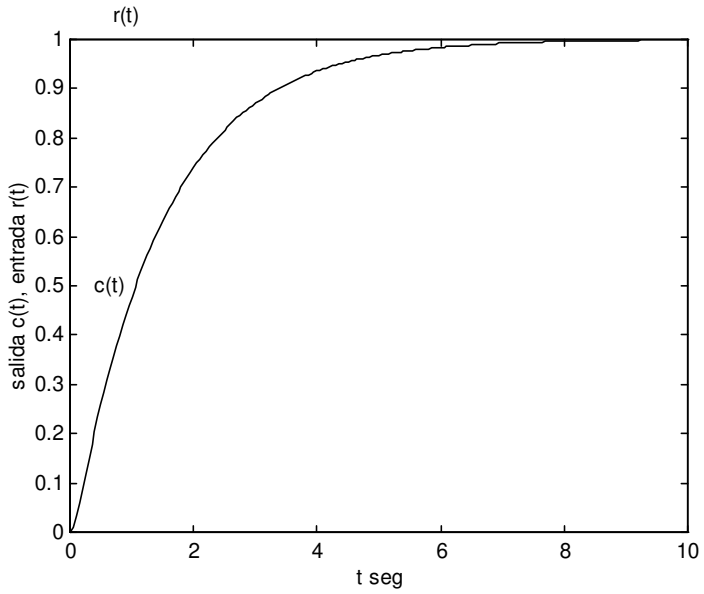
$$A = \left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right)_{s\to 0} = 1$$

$$B = \left[\frac{\omega_n^2}{s\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}\right]_{s\to -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

$$C = \left[\frac{\omega_n^2}{s\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}\right]_{s\to -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta^2 - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$c(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta^2 - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$



Esta gráfica muestra el tipo de respuesta del sistema ante un escalón de entrada. La respuesta es puramente exponencial y se puede apreciar que la salida c(t) alcanza a la señal de entrada r(t) en estado estable con un error igual a cero.

La respuesta transitoria de un sistema de control real frecuentemente presenta oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estacionario. Este tipo de respuestas caen en el caso subamortiguado con $0 < \zeta < 1$, y es la respuesta más apropiada para un sistema de control por la rapidez con la cual se alcanza a la señal de referencia. En la Fig.4.7 se muestra la respuesta temporal de un sistema de control a un escalón de entrada para el caso subamortiguado, especificando las características más importantes de la misma.

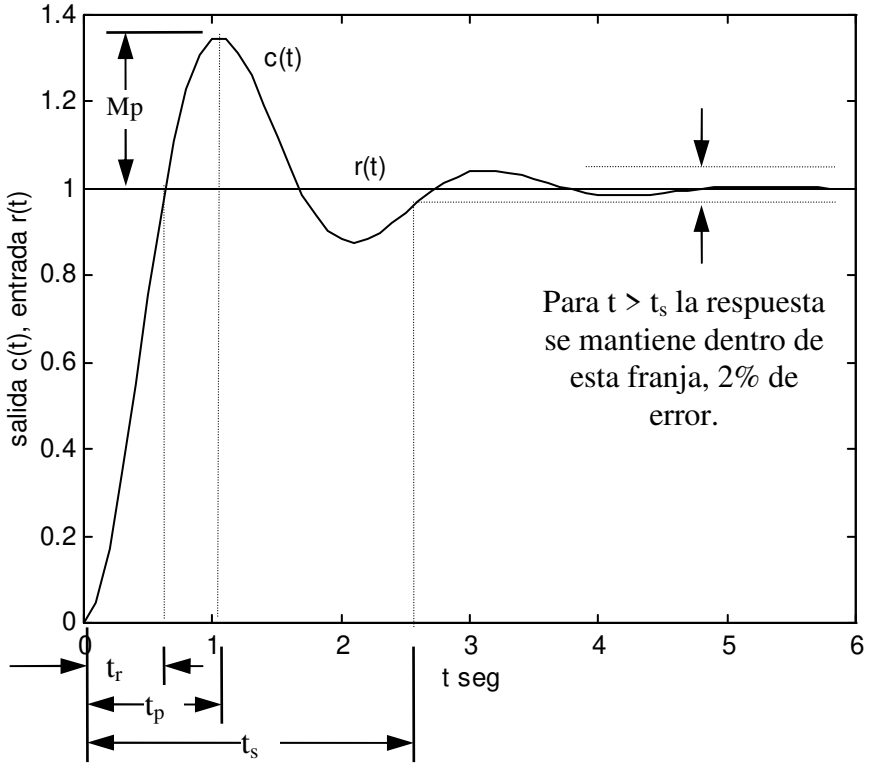


Fig.4.7 Curva de respuesta temporal de un sistema de control a un escalón unitario de entrada con $0 < \zeta < 1$.

1.- **Tiempo de crecimiento**, t_r . Es el tiempo requerido para que la respuesta crezca de 0 al 100 % del valor final.

2.- **Tiempo pico**, t_p . Es el tiempo requerido por la respuesta para alcanzar el primer pico del sobreimpulso.

3.- **Tiempo de establecimiento**, t_s . Es el tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final (habitualmente 5 % al 2 %). Se relaciona el tiempo de establecimiento con la constante de tiempo más grande del sistema.

4.- **Máximo sobreimpulso**, M_p . Es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad.

A continuación se obtendrán los tiempos t_r , t_p , t_s y el máximo sobreimpulso M_p.

Tiempo de crecimiento, t_r .

Partiendo de la ecuación :

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

como el tiempo de crecimiento se obtiene cuando la respuesta alcanza por primera vez a la señal de referencia, por lo tanto :

$$c(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r}\left(\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t_r\right)$$

$$\cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t_r = 0$$

$$tan\omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} tan^{-1}\frac{\omega_d}{-\sigma}$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

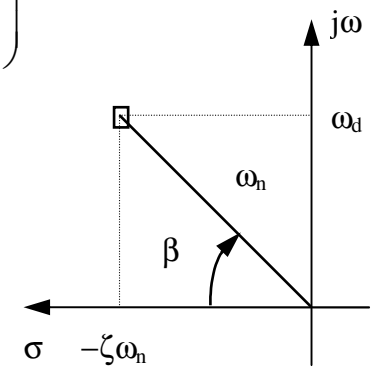


Fig.4.8 Ubicación de una raíz compleja conjugada en el plano S.

En la Fig.4.8 se representa la ubicación de una raíz compleja conjugada en el plano de Laplace y la definición del ángulo β.

Tiempo pico. t_p

Para la obtención del tiempo pico se toma como referencia la ecuación :

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

diferenciando c(t) con respecto al tiempo e igualando a cero,

$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_p} = (\operatorname{sen}\omega_d t_p)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0$$

$\operatorname{sen}\omega_d t_p = 0$; $\omega_d t_p = 0,\pi,2\pi,3\pi,....$

Como el tiempo de pico corresponde al primer pico de sobreimpulso, $\omega_d t_p = \pi$.

Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Máximo sobreimpulso. M_p

El máximo sobreimpulso se produce en el tiempo pico, cuando $t = t_p = \pi/\omega_d$,

$M_p = c(t_p) - 1$

$$M_p = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_p}(\cos\omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_d t_p) - 1 \;\; ; \;\; \text{como } t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = -e^{-\zeta\omega_n\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\pi)$$

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Tiempo de establecimiento. t_s

El tiempo de establecimiento esta relacionado con la constante de tiempo del sistema de segundo orden, por lo tanto analizando la ecuación de la respuesta :

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

La constante de tiempo aparece en el término exponencial como $\tau = 1/\zeta\omega_n$. El tiempo de establecimiento se define como :

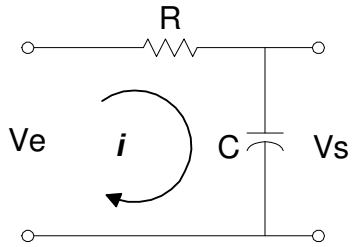
$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad ; \text{ para un 2\% de error.}$$

$$t_s = 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad ; \text{ para un 5\% de error.}$$

Ejemplos

1.- Obtener las características de la respuesta temporal del siguiente circuito si el voltaje de entrada es un escalón de magnitud $\mathbf{v_e}$.

El primer paso es obtener la función de transferencia del circuito.



$$v_e = iR + \frac{1}{C}\int idt \;\Rightarrow\; V_e(s) = I(s)R + \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$v_s = \frac{1}{C}\int idt \;\Rightarrow\; V_s(\mathrm{s}) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{I(s)\left(\frac{1}{Cs}\right)}{I(s)\left(\frac{RCs+1}{Cs}\right)}$$

$$\frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

como $V_e(s) = \frac{v_e}{s}$

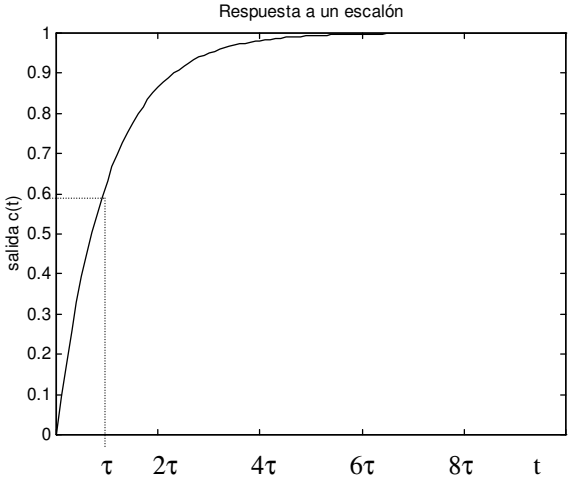
$$V_s(s) = \frac{v_e\left(\frac{1}{RC}\right)}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$A = \left.\frac{v_e\left(\frac{1}{RC}\right)}{s+\frac{1}{RC}}\right|_{s=0} = v_e \;;\; B = \left.\frac{v_e\left(\frac{1}{RC}\right)}{s}\right|_{s=-\frac{1}{RC}} = -v_e$$

$$V_e(s) = \frac{v_e}{s} - \frac{v_e}{s+\frac{1}{RC}}$$

Antitransformando se obtiene ; $v_e(t) = v_e - v_e e^{-\frac{t}{RC}} = v_e(1-e^{-\frac{1}{RC}})$

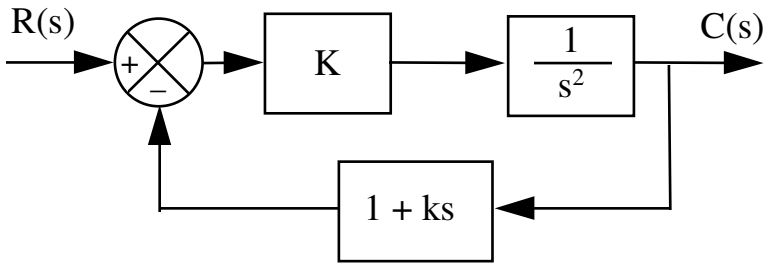
En la siguiente gráfica se muestra la respuesta del sistema a un escalón de entrada.



Las características de la respuesta son que al 63.2 % de la salida t = τ , y la salida se estabiliza en un 2 % de error despues de 4τ.

Para el circuito, τ = RC, y por tanto t_s = 4 RC.

2.- Para el siguiente servomecanismo determinar los valores de K y k de manera que el máximo sobreimpulso en respuesta al escalón unitario sea 25 % y el tiempo de pico de 2 seg.



$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad ; \text{ como } M_p = 25\ \%$$

$$e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25 \quad \therefore \quad \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln 0.25$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{(1.39)^2}{(1.39)^2 + \pi^2}} = 0.4$$

El tiempo pico t_p es igual a 2 seg. Por tanto,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 2 \quad \therefore \quad \omega_d = 1.57$$

La frecuencia natural no amortiguada ω_n es :

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1.57}{\sqrt{1-0.4^2}} = 1.71$$

La función de transferencia del sistema de control es :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\left(\frac{1}{s^2}\right)}{1 + K\left(\frac{1}{s^2}\right)(1+ks)} = \frac{K}{s^2 + Kks + K}$$

Igualando la ecuación característica de lazo cerrado con la ecuación general de segundo orden y resolviendo :

$$s^2 + Kks + K = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = K\,; \quad K = 1.71^2 = 2.93$$

$$2\zeta\omega_n = Kk \quad \therefore \quad k = \frac{2\zeta\omega_n}{K} = \frac{2(0.4)(1.71)}{2.93} = 0.47$$

En la Fig.4.9 se muestra la respuesta temporal del sistema de control, indicando las características de la respuesta.

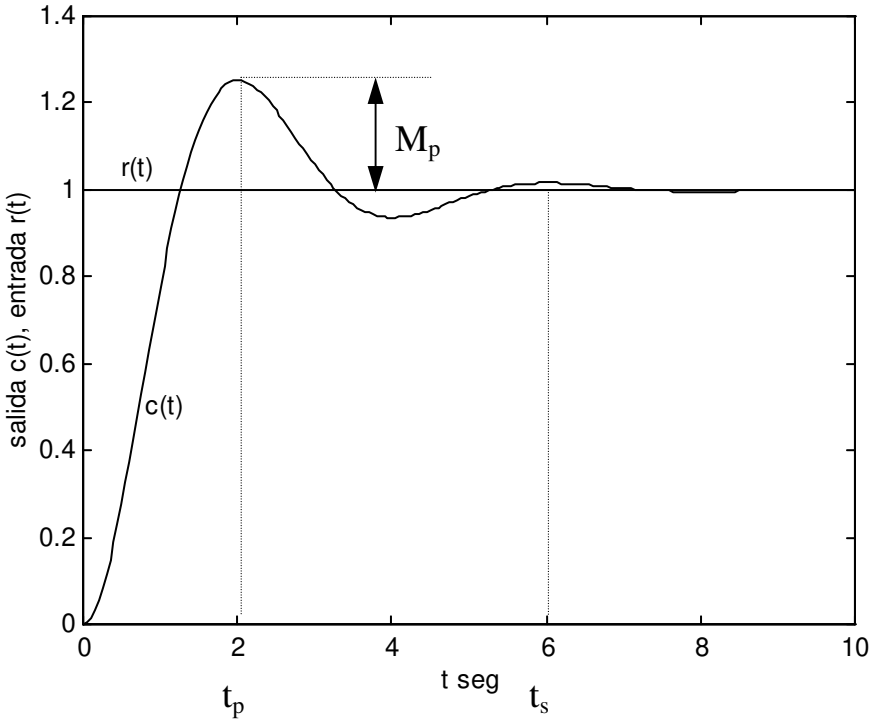


Fig. 4.9 Respuesta temporal ante un escalón de entrada.

2.- El diagrama de bloques de la Fig.4.10 representa un sistema de control automático de velocidad de un motor de c.d. donde :

K_a = 11.4 Ganancia del rectificador controlado **RC**.

K_m = 0.58 Ganancia del motor.

K_v = 5.46 x 10^{-3} Ganancia del transductor de velocidad.

τ_m = 0.77 Constante de tiempo del motor.

Se desea determinar el valor de los parámetros del controlador **PI, K_p** y τ_i, de manera que el sistema tenga una respuesta con un $M_p = 20\ \%$ y un $t_s = 2$ seg.

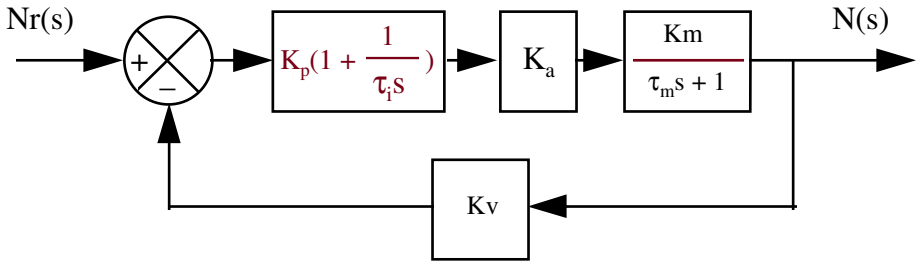


Fig.4.10 Diagrama de bloques del sistema de control de velocidad.

El primer paso es obtener la función de transferencia del sistema,

$$\frac{N(s)}{N_r(s)} = \frac{K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)K_a\left(\frac{K_m}{\tau_m s+1}\right)}{1+K_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)K_a\left(\frac{K_m}{\tau_m s+1}\right)K_v} = \frac{K_pK_aK_m(\tau_i s+1)}{\tau_i\tau_m s^2+(1+K_pK_aK_mK_v)\tau_i s+K_pK_aK_mK_v}$$

$$\frac{N(s)}{N_r(s)} = \frac{K_pK_aK_m\left(s+\frac{1}{\tau_i}\right)}{\left[s^2+\frac{(1+K_pK_aK_mK_v)s}{\tau_m}+\frac{K_pK_aK_mK_v}{\tau_i\tau_m}\right]\tau_m} = \frac{\frac{K_pK_aK_m}{\tau_m}\left(s+\frac{1}{\tau_i}\right)}{s^2+\frac{(1+K_pK_aK_mK_v)s}{\tau_m}+\frac{K_pK_aK_mK_v}{\tau_i\tau_m}}$$

Sustituyendo el valor de los parámetros conocidos se tiene :

$$\frac{N(s)}{N_r(s)} = \frac{8.578K_p\left(s+\frac{1}{\tau_i}\right)}{s^2+(1.2987+0.046885K_p)s+\frac{0.046885K_p}{\tau_i}}$$

Igualando la ecuación característica del sistema a la ecuación general de segundo orden,

$$2\zeta\omega_n = 1.2987+0.046885K_p \quad ; \quad \omega_n^2 = \frac{0.046885K_p}{\tau_i}$$

$$0.2 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \ln 0.2 = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0.455 \quad ; \quad t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \ \therefore \ \omega_n = 4.4$$

Despejando K_p de la siguiente ecuación,

$$2\zeta\omega_n = 1.2987 + 0.046885K_p \quad \therefore \quad K_p = \frac{4 - 1.2987}{0.046885} = 57.6$$

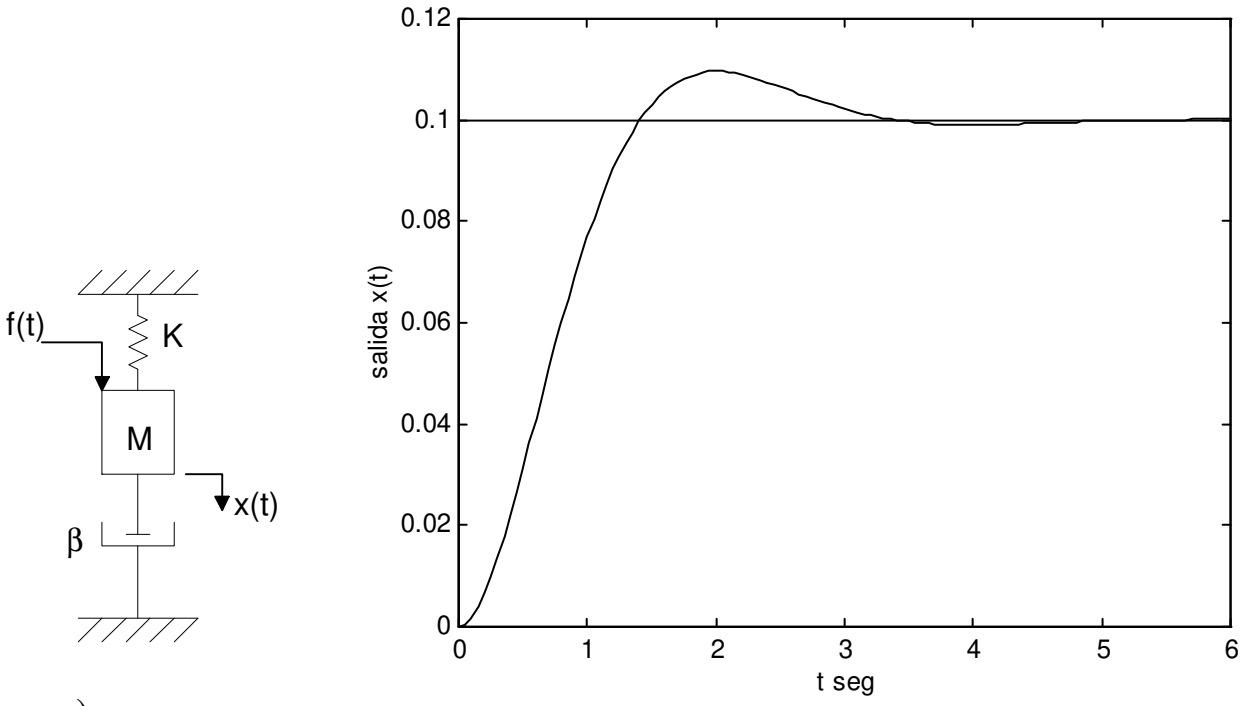
$$\omega_n^2 = \frac{0.046885K_p}{\tau_i} \quad \therefore \quad \tau_i = \frac{(0.046885)(57.6)}{4.4^2} = 0.139$$

$$\frac{N(s)}{N_r(s)} = \frac{494.6(s + 7.1736)}{s^2 + 4s + 19.36}$$

La siguiente gráfica representa la respuesta del sistema a un escalón de entrada Nr(s) = 10/s.

Ejercicios para realizar en clase.

1.- La Fig. 4.11(a) muestra un sistema mecánico vibratorio. Cuando se aplica una fuerza de dos libras (entrada escalón) al sistema, la masa oscila como se puede ver en la Fig. 4.11(b). Se pide determinar M, β y K del sistema partiendo de la curva de respuesta.



a)

b)

Fig. 4.11 a) Sistema vibratorio mecánico. b) Respuesta a un escalón

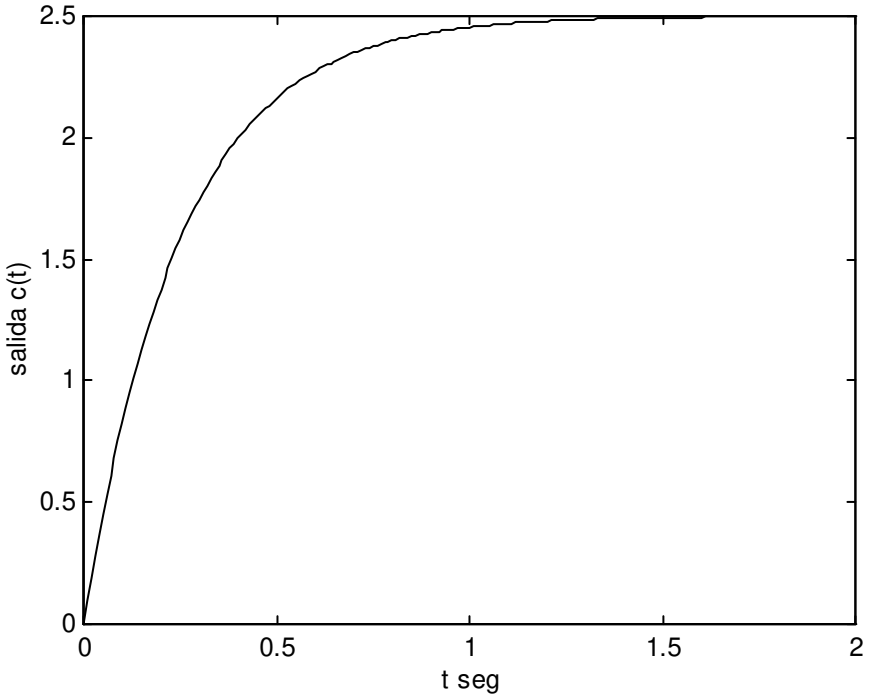
2.- Sea el sistema de control de realimentación unitaria cuya función de transferencia de lazo abierto es :

$$G(s) = \frac{0.4s + 1}{s(s + 0.6)}$$

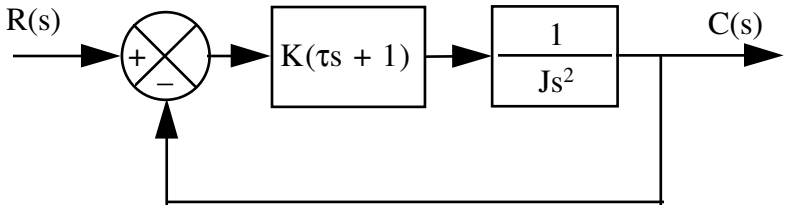
Obtener la respuesta a una entrada escalón unitario, determinando el tiempo de crecimiento, tiempo pico, tiempo de establecimiento y máximo sobreimpulso.

Ejercicios de tarea.

1.- Obtener la función de transferencia a partir de la respuesta temporal que se muestra en la siguiente gráfica.



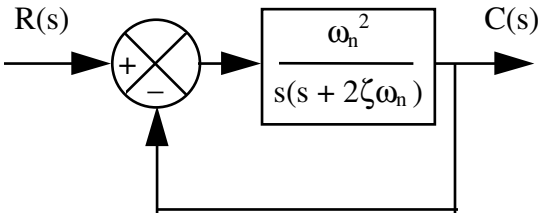
2.- El siguiente diagrama de bloques corresponde a un sistema de control de posición de un vehículo espacial. Suponiendo que la constante de tiempo del control τ es igual a 3 segundos y que la relación de par a inercia K/J es de 2/9 rad^2/seg^2 , se pide hallar la relación de amortiguamiento del sistema.



3.- Obtener la respuesta transitoria del siguiente sistema de control sometido a un escalón de entrada, graficando la respuesta para los siguientes casos :

a) $\zeta = 0$.
b) $0 < \zeta < 0$.
c) $\zeta = 1$.
d) $\zeta > 1$.

Dar valores a $K > 0$ y $\omega_n > 0$.



Unidad 5
Análisis del Lugar de las Raíces.

El lugar geométrico de las raíces está definido como el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica al variar la ganancia **K** desde cero hasta infinito.

El método del lugar de las raíces, permite encontrar los polos de lazo cerrado partiendo de los polos y ceros de lazo abierto, tomando a la ganancia como parámetro.

Al diseñar un sistema de control lineal, el método del lugar de las raíces resulta ser muy útil pues indica la forma en que hay que modificar la posición de los polos y ceros de lazo abierto para que la respuesta cumpla con las especificaciones del comportamiento del sistema.

Como el método es un procedimiento gráfico para hallar las raíces de la ecuación característica, brinda un procedimiento gráfico efectivo para hallar las raíces de cualquier ecuación polinómica que se presente en el estudio de sistemas físicos.

5.1 Condiciones del Lugar de las Raíces.

Para el sistema de control de la Fig. 5.1, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

donde :

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

o

$$G(s)H(s) = -1$$

que es la ecuación característica de lazo cerrado.

Como G(s)H(s) es una magnitud compleja, la ecuación G(s)H(s) = -1 se puede representar de la siguiente forma :

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^0 (2k + 1) \quad (k = 1,2,3,.....) \quad \text{condición de ángulo.}$$

$$\left| G(s)H(s) \right| = 1 \quad \text{condición de amplitud.}$$

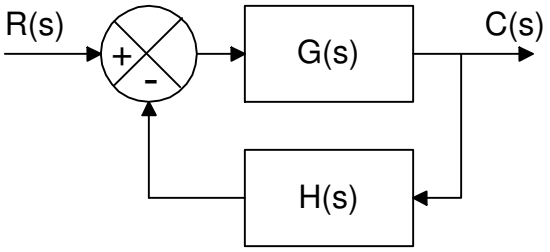
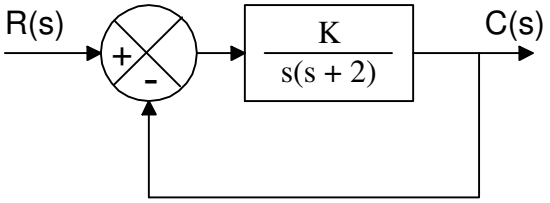


Fig.5.1 Sistema de control.

Los valores de **s** que cumplen las condiciones de ángulo y amplitud, son las raíces de la ecuación característica o polos de lazo cerrado.

Diagramas del lugar de las raíces de sistemas de segundo orden.

Para el siguiente sistema de control se desea obtener el lugar de las raíces al variar K desde cero hasta infinito.



La función de transferencia del sistema es :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K}{s(s+2)}}{1+\dfrac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

La ecuación característica de lazo cerrado es :

$$s^2 + 2s + K = 0$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

Ya que las raíces dependen del valor de K, comenzaremos el análisis variando K desde cero hasta infinito.

K = 0

Las raíces se encuentran localizadas en ; $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-0}$

$s_1 = -2$ y $s_2 = 0$

0 < K < 1

Con **K** = 0.5 las raíces se encuentran en ; $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-0.5}$

$s_1 = -1.707$ y $s_2 = -0.292$

K = 1

Las raíces están en ; $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-1}$

$s_1 = -1$ y $s_2 = -1$

K > 1

La ubicación de las raíces es ; para **K** = 2 , $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2}$

$s_1 = -1 + j$ y $s_2 = -1 - j$

y para **K** = 10 , $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10}$

$s_1 = -1 + j3$ y $s_2 = -1 - j3$

En la Fig.5.2 se muestra el diagrama del lugar de las raíces graficado a partir de los puntos obtenidos. Como se puede ver, para cada valor de **K** la posición de las raíces cambia. El lugar de las raíces comienza en los polos de la función de transferencia de lazo abierto ($s_1 = -2$, $s_2 = 0$), los cuales se desplazan sobre el eje real hacia **-1** , para después separarse del eje real y convertirse en raíces complejas conjugadas con parte real **-1**.

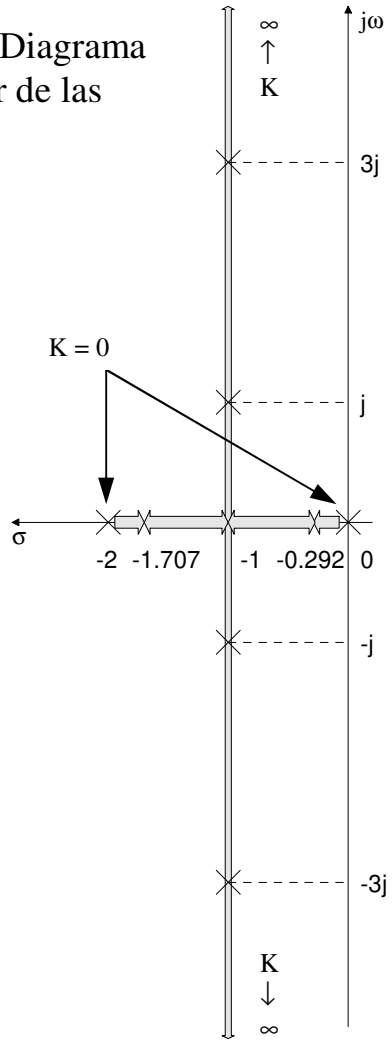


Fig.5.2 Diagrama del lugar de las raíces.

El lugar de la raíces proporciona información sobre la estabilidad del sistema de control y de la respuesta temporal del mismo, al variar la ganancia desde cero hasta infinito.

En cuanto a la estabilidad de sistema, se puede apreciar en la Fig.5.2 que las raíces se mantienen en el semiplano izquierdo de Laplace para cualquier valor de K, por lo que el sistema sera estable para todo valor de $K > 0$.

En la Fig.5.2 se puede observar que para valores de K entre cero y uno, las raíces son reales diferentes por lo que $\zeta > 1$ y por tanto la respuesta temporal sera del tipo sobreamortiguado.

Cuando el valor de K es igual a uno, las raíces son reales repetidas por lo que $\zeta = 1$ y la respuesta temporal es criticamente amortiguada.

Para valores de K mayores que uno, las raíces son complejas conjugadas con parte real -1, este caso corresponde a un $0 < \zeta < 1$, y la respuesta temporal es del tipo subamortiguada.

Realizar un diagrama de lugar de las raíces de un sistema de mayor orden dando valores a K y obteniendo las raíces para cada uno de estos valores, es poco práctico. Para simplificar la construcción de un diagrama del lugar de las raíces se utilizaran las reglas generales de construcción del lugarde las raíces que se basan en las condiciones de ángulo y de módulo.

Para que un punto pertenezca al lugar de las raíces es necesario que la contribución ángular de todas las raíces hacia ese punto sea igual a $\pm 180^0\ (2k+1)$, donde $k = 0,1,2,3.....$, condición ángular, y que $|G(s)H(s)| = 1$ condición de módulo.

Tomando como ejemplo el lugar de las raíces de la Fig.5.2, y eligiendo un punto de este diagrama $(-1 + 1.2j)$ para determinar si este punto pertenece realmente al lugar de las raíces, se procede a determinar la contribución ángular de todas las raíces al punto $(-1 + 1.2j)$. En la Fig.5.3 se puede apreciar que la contribución ángular se obtiene trazando lineas desde todas las raíces al punto $(-1 + 1.2j)$, esto genera los ángulos ϕ_1 y ϕ_2, donde $\phi_1 = 180^0 - \tan^{-1} 1.2$ y $\phi_2 = \tan^{-1} 1.2$ dando como resultado :

$$\angle G(s)H(s) = \phi_1 + \phi_2 = \pm 180^0\ (2k + 1)$$

$$129.8^0 + 50.2^0 = 180^0$$

Como este punto efectivamente pertenece al lugar de las raices, utilizando la condición de módulo se puede determinar la ganancia en el punto (-1 + 1.2j) como se muestra a continuación.

$|G(s)H(s)|_{s_1} = 1$ donde s_1 es el punto donde se quiere obtener la ganancia.

$$|K/s(s+2)|_{s_1} = -1 + 1.2j \;:\; K = |(-1+1.2j)(-1+1.2j+2)| = 2.44$$

Este valor se puede comprobar sustituyendolo en la ecuación característica de lazo cerrado y sacando las raíces de este polinomio :

$$s^2 + 2s + 2.44 = 0 ; \quad s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 9.76}}{2} \;;\; s_{1,2} = -1 \pm 1.2\,j$$

Todo punto que este fuera del lugar de las raíces no cumplira con las condiciones de ángulo y módulo.

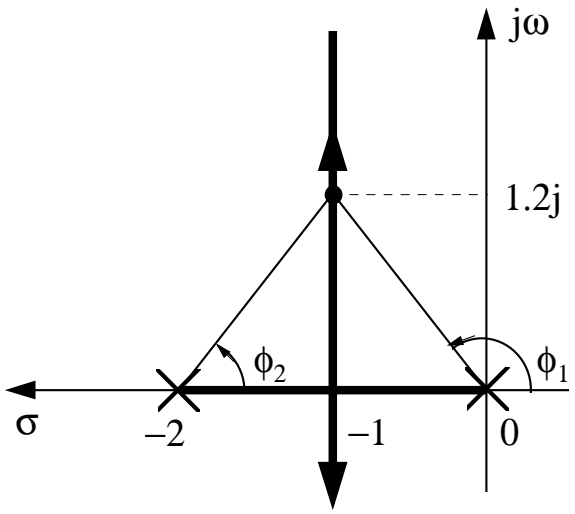


Fig.5.3 Comprobación del lugar de las raíces.

5.2 Reglas de construcción del Lugar Geométrico de las Raíces.

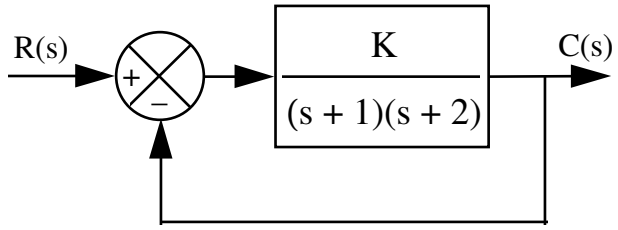
1.- Puntos de origen (K = 0)	Los puntos de origen (K = 0) del lugar de las raíces son los polos de G(s)H(s). Los polos incluyen los que se hallan en el plano s finito y en el infinito.
2.- Puntos terminales (K = ∞)	Los puntos terminales (K = ∞) del lugar de las raíces son los ceros de G(s)H(s). Los ceros incluyen los que se hallan en el plano s finito y en el infinito.
3.- Número de ramas separadas	Número de ramas N = Z si Z > P Número de ramas N = P si Z < P donde P = número de polos finitos de G(s)H(s) donde Z = número de ceros finitos de G(s)H(s)
4.- Simetría del lugar de las raíces.	Los lugares de las raíces de los sistemas con funciones de transferencia racionales con coeficientes constantes son simétricos con respecto al eje real del plano s.
5.- Asíntotas del lugar de las raíces para s $\rightarrow \infty$.	$\theta_k = \frac{\pi(2k+1)}{P-Z}$ donde k = 0,1,2.....hasta $k = P - Z$
6.- Intersección de las asíntotas.	La intersección de las asíntotas tiene lugar sobre el eje real del plano s. $\sigma_1 = -\frac{\sum \text{polos de G(s)H(s)} - \sum \text{ceros de G(s)H(s)}}{P-Z}$

7.- Lugar de las raíces sobre el eje real.	Un punto del eje real de plano s pertenece al lugar de las raíces, si el número total de polos yceros de G(s)H(s) que hay a la derecha del punto considerado es impar.
8.- Angulos de salida y de llegada.	El ángulo de salida de un polo o el ángulo de llegada de un cero de G(s)H(s) puede determinarse suponiendo un punto s_1 muy próximo al polo ,o al cero. $$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{i=1}^{m} \angle s_1 + \angle z_i - \sum_{j=1}^{m+n} \angle s_1 + \angle p_j = \pi(2k+1)$$
9.- Intersección del lugar de las raíces con el eje imaginario.	Se obtienen utilizando el criterio de Routh.
10.- Puntos de separación y puntos de llegada.	Se obtienen con ; $\frac{dK}{ds} = 0$
11.- Cálculo del valor de K en el lugar de las raíces.	El valor absoluto de K en cualquier punto s_1 del lugar de las raíces se obtiene mediante la siguiente ecuación : $$\left\|K\right\| = \frac{1}{\left\|G(s_1)H(s_1)\right\|}$$

5.3 Ejemplos.

1.- Para el siguiente sistema de control determinar :

a) El lugar geométrico de las raíces.
b) Rango de estabilidad.
c) El valor de la ganancia para obtener una respuesta transitoria con un máximo sobreimpulso del 25%.
d) La gráfica de la respuesta temporal del sistema.



a) El primer paso es obtener la función de transferencia de lazo abierto del sistema.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K}{(s+1)(s+2)}}{1+\dfrac{K}{(s+1)(s+2)}}$$

donde ; $G(s)H(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$ es la función de transferencia de lazo abierto.

como P > Z , entonces N = 2. Por lo tanto hay dos asíntotas y k toma los dos primeros valores 0 y 1.

$$\theta_k = \frac{180°(2k+1)}{P-Z} \quad ; \quad \theta_1 = \frac{180°(2x0+1)}{2} = 90° \quad ; \quad \theta_2 = \frac{180°(2x1+1)}{2} = 270°$$

La intersección de las asíntotas ocurre en :

$$\sigma_1 = -\frac{\sum \text{polos de G(s)H(s)} - \sum \text{ceros de G(s)H(s)}}{P-Z} = -\frac{3}{2}$$

En la Fig.5.4 se puede observar que existe lugar de las raíces sobre el eje real entre los dos polos, ya que si se coloca un punto de prueba entre ellos habra un número impar de raíces a la derecha del mismo.

Cuando existe lugar de las raíces entre dos polos, necesariamente habrá un punto de separación, el cual se obtiene :

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

se despeja K de la siguiente ecuación :

$$\frac{K}{(s+1)(s+2)} = 1 \quad \therefore \quad K = s^2 + 3s + 2$$

entonces,

$$\frac{dK}{ds} = 2s + 3 = 0 \ ; \ \text{y} \quad s = -\frac{3}{2} \quad \text{que es el punto de separación.}$$

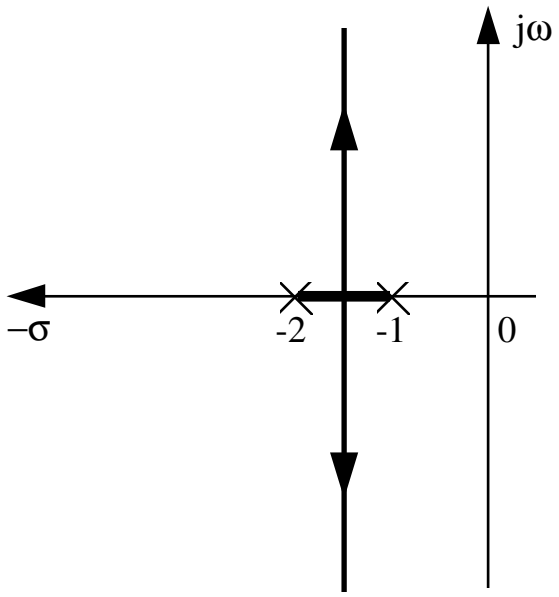


Fig.5.4 Lugar de las raíces.

b) Como las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo de Laplace para valores de K > 0, por lo tanto el sistema de control es estable para todo valor de K mayor que cero.

c) Para determinar el valor de K cuando se da como dato de diseño un parámetro de respuesta temporal, es necesario obtener las coordenadas del punto donde se desea determinar la ganancia. Como $M_p = 25\%$, entonces :

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad ; \quad 0.25 = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad \therefore \quad \zeta = 0.4$$

como el ángulo β está directamente relacionado con ζ se tiene que :

$$\beta = \cos^{-1}\zeta = \cos^{-1} 0.4 = 66.42^0$$

En la Fig.5.5 se muestra con un pequeño cuadro el punto de intersección de la linea de $\zeta = 0.4$ con el lugar de las raíces. Las coordenadas de este punto son s_1 = -1.5 + j3.437.

La ganancia se obtiene con la condición de módulo, evaluando en el punto s_1.

$$\left|G(s)H(s)\right|_{s_1} = 1 \quad \text{o} \quad \text{K} = \left|\frac{1}{\text{G(s)H(s)}}\right|_{s_1}$$

$$K = \left|(s+1)(s+2)\right|_{s_1 = -1.5 + j3.437}$$

$$K = \left|(-1.5 + j3.437 + 1)(-1.5 + j3.437 + 2)\right| = 12$$

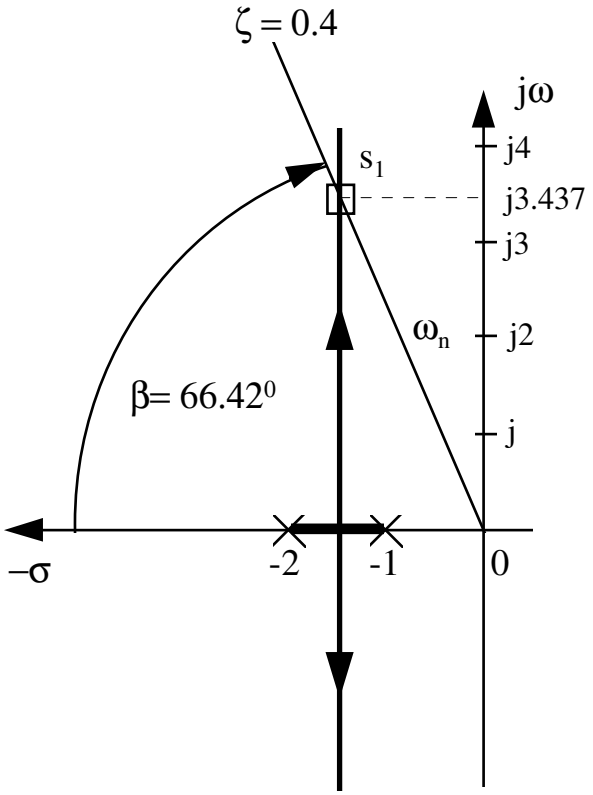


Fig.5.5 Cálculo del valor de K en el lugar de las raíces.

d) Para obtener la gráfica de la respuesta temporal del sistema ante un escalón de entrada, primero se sustituye el valor de la ganancia K = 12 en la función de transferencia de lazo cerrado,

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12}{s^2 + 3s + 14}$$

En la Fig.5.6 se muestra la respuesta temporal del sistema ante un escalón de entrada.

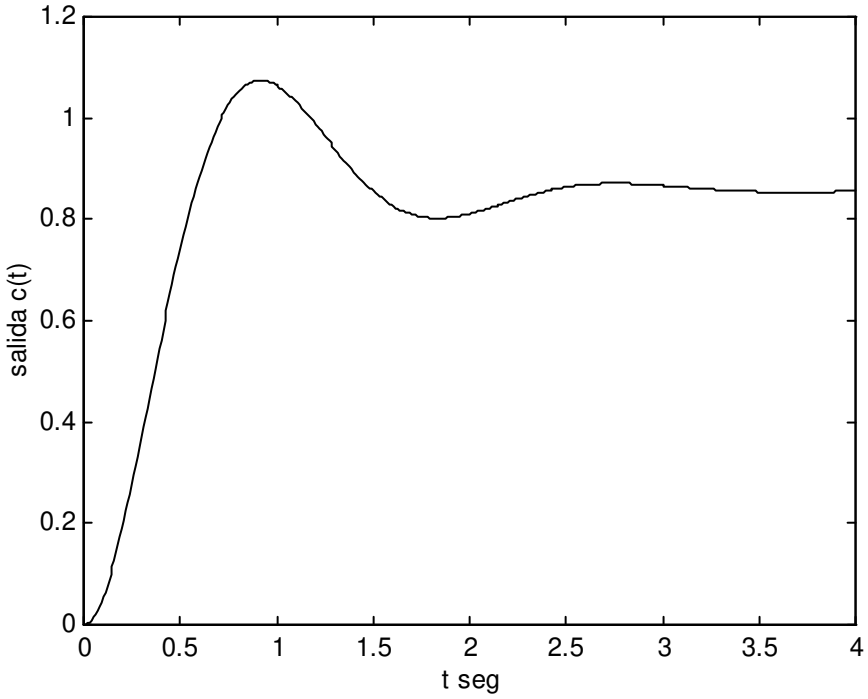


Fig.5.6 Respuesta temporal del sistema.

2.- Para la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s) = \dfrac{K(s+4)}{s(s+1)}$ obtener :

a) Lugar geométrico de las raíces.
b) Rango de estabilidad.

a) Como Z > P ; N = 2

Hay una sola asíntota ya que P - Z = 1, y por lo tanto k toma el primer valor que es cero.

$$\theta = 180^0$$

Como la asíntota está sobre el eje real, no hay necesidad de encontrar σ_1.

En la Fig.5.7 se puede observar que hay lugar de las raíces entre los dos polos y hacia la izquierda del cero. Como hay lugar de las raíces entre dos polos, necesariamente hay un punto de separación.

$$\frac{K(s+4)}{s(s+1)} = 1 \quad \therefore \quad K = \frac{s^2 + s}{s+4}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 = (2s+1)(s+4) - s^2 - s$$

$$s^2 + 8s + 4 = 0 \quad \therefore \quad s_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-16}}{2}$$

Las raíces de esta ecuación son :

$s_1 = -0.535$ punto de separación.
$s_2 = -7.464$ punto de llegada.

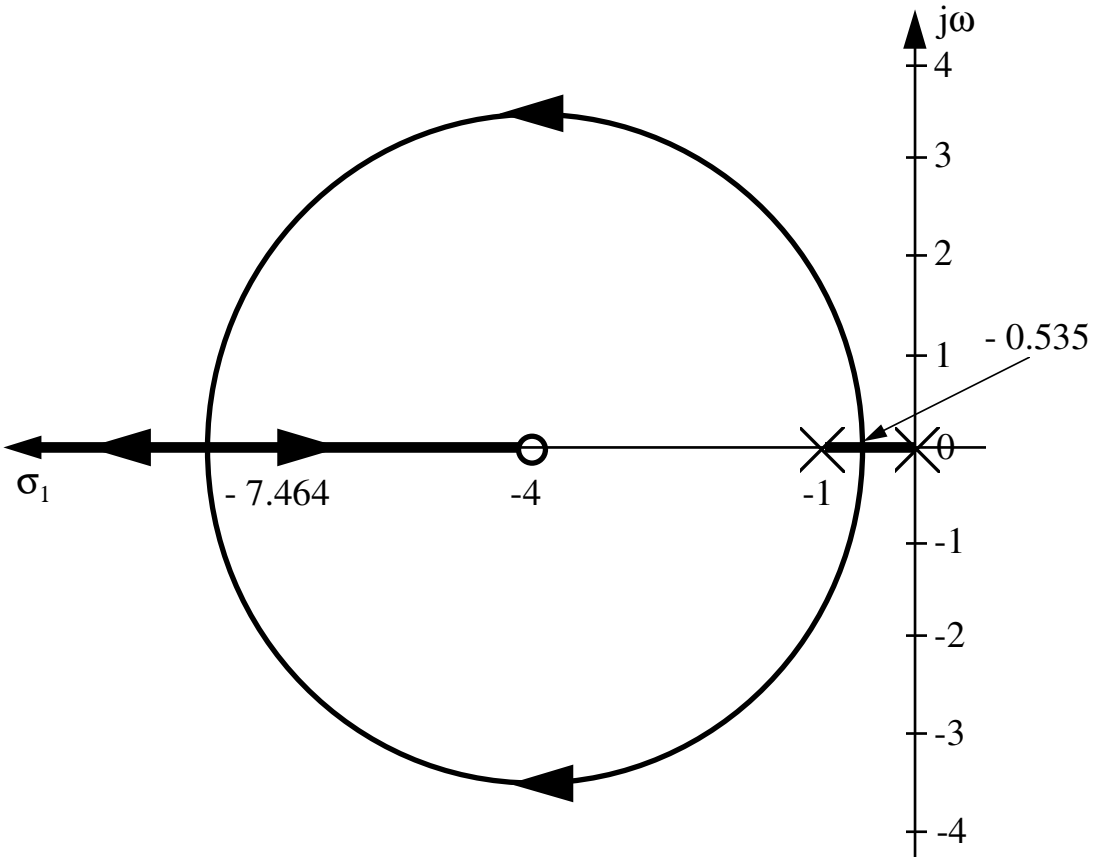


Fig.5.7 Lugar de las raíces de $G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)}$.

b) Ya que las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo de Laplace para cualquier valor de K > 0, este sistema es estable para todo valor de K > 0.

3.- Para el siguiente sistema de control con función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$, determinar :

a) Lugar geométrico de las raíces.
b) Rango de estabilidad.

a) P - Z = 3, N = 3 y k toma tres valores (0,1 y 2), por lo tanto :

$$\theta_1 = 60^0 \quad ; \quad \theta_2 = 180^0 \quad ; \quad \theta_3 = 300^0 \quad \text{y} \quad \sigma_1 = -\frac{3}{3} = -1$$

El lugar de las raíces sobre el eje real se encuentra entre los polos ubicados en el origen y -1, y a la izquierda del polo ubicado en -2, como se puede ver en la Fig.5.8.

Debido a que existe lugar de las raíces entre dos polos, hay un punto de separación en :

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 1 \quad \therefore \quad K = s^3 + 3s^2 + 2s$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 = 3s^2 + 6s + 2$$

Las raíces de esta ecuación son :

$$s_1 = -0.42 \text{ y } s_2 = -1.57$$

como $s_2 = -1.57$ no esta dentro del lugar de las raíces sobre el eje real, por lo tanto no se toma en cuenta ya que esta raíz no pertenece al lugar de las raíces. El punto de separación se encuentra en $s_1 = -0.42$.

b) En la Fig.5.7 se puede observar que las asíntotas se cruzan al semiplano derecho de Laplace, en este caso el sistema no es estable para todo valor de K ya que las raíces se cruzan al semiplano derecho y se tendra un rango limitado de estabilidad. La forma de encontrar el rango de estabilidad es utilizar el criterio de estabilidad de Routh.

El criterio de Routh utiliza el polinomio característico de lazo cerrado dado por la ecuación :

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad ; \quad 1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6 - K}{3}$	0
s^0	K	

En la primera columna del arreglo de Routh la única posibilidad de cambio de signo se encuentra en la fila de s^1 por lo que :

$$\frac{6-K}{3}=0 \;\; ; \quad \text{donde K = 6}$$

y el rango de estabilidad para $0 < K < 6$.

Para determinar el cruce de las raíces por el eje imaginario se utiliza la ecuación de la fila s^2 del arreglo de Routh evaluada con K = 6 que es cuando las raíces cruzan por el eje imaginario.

$$3s^2 + K = 0 \; ; \; 3s^2 + 6 = 0 \quad \text{donde} \quad s_{1,2} = \pm j1.414$$

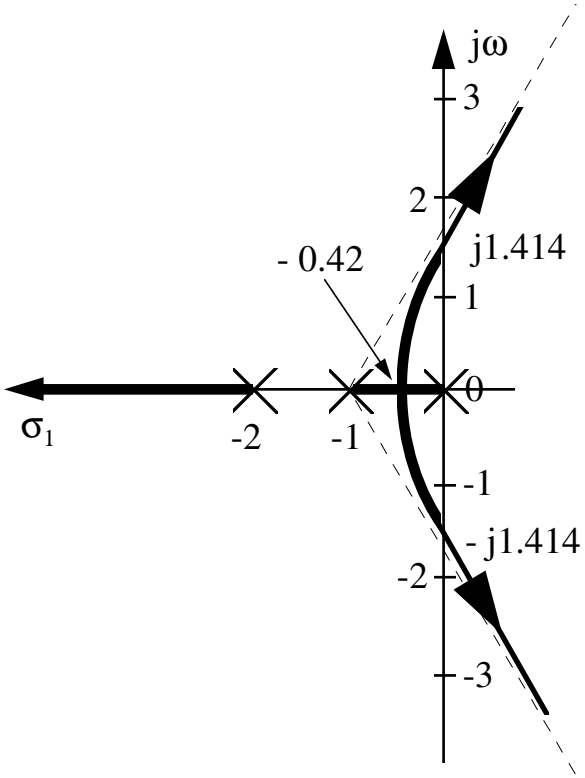


Fig.5.8 Lugar de las raíces de $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s+1)}$.

4.- $G(s)H(s) = \dfrac{K(s^2+2s+4)}{s(s+1)(s^2+4s+16)}$ es la función de transferencia de lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria. Para este sistema determinar :

a) El lugar geométrico de las raíces.
b) Rango de estabilidad.

a) $P - Z = 2 \quad ; \quad N = 4 \quad ; \quad k = 0,1$

$$\theta_1 = 90^0 \text{ y } \theta_2 = 270^0 \; ; \quad \sigma_1 = -\frac{(5-2)}{2} = -1.5$$

Hay lugar de las raíces sobre el eje real entre los polos ubicados en el origen y -1 como se puede observar en la Fig.5.10, por tanto se debe calcular el punto de separación del eje real de la ecuación :

$$\frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = 1 \quad \therefore \quad K = \frac{s^4+5s^3+20s^2+16s}{s^2+2s+4}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 = 2s^5+11s^4+36s^3+84s^2+160s+64$$

donde las raíces son :

$$2(s+0.5115)\left[(s-0.014)^2+2.622^2\right]\left[(s+2.545)^2+1.615^2\right]$$

La raíz que representa el punto de separación es la real ubicada en $s_1 = -0.5115$

Cuando se tienen raíces complejas conjugadas es necesario determinar los ángulos de salida (para los polos complejos conjugados) y los de llegada (para los ceros complejos conjugados). En la Fig.5.9a se muestra como se obtienen los ángulos de salida, y en la Fig.5.9b los ángulos de llegada.

Para determinar los ángulos de salida o llegada, se trazan lineas desde todas las raíces hacia un punto muy próximo a la raíz de la cual se quiere determinar el ángulo. Despues se obtienen los ángulos medidos en forma convencional positiva y se sustituyen en la siguiente ecuación :

$$\angle G(s_1)H(s_1) = \sum_{i=1}^{m} \angle s_1 + \angle z_i - \sum_{j=1}^{m+n} \angle s_1 + \angle p_j = \pi(2k+1)$$

Angulos de salida ; $\phi_s + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 = 180^0\,(2k+1)$

$$\phi_1 = 90^0 \;;\; \phi_2 = 180^0 - \tan^{-1} 3.46 = 106.12^0 \;;\; \phi_3 = 180^0 - \tan^{-1} 3.46/2 = 120^0$$

$$\phi_4 = 180^0 - \tan^{-1} 5.192 = 100.9^0 \;;\; \phi_5 = 180^0 - \tan^{-1}\ 1.728 = 120^0$$

$$\phi_s = 180^0 - 90^0 - 106.12^0 - 120^0 + 100.9^0 + 120^0 = \underline{84.78^0}$$

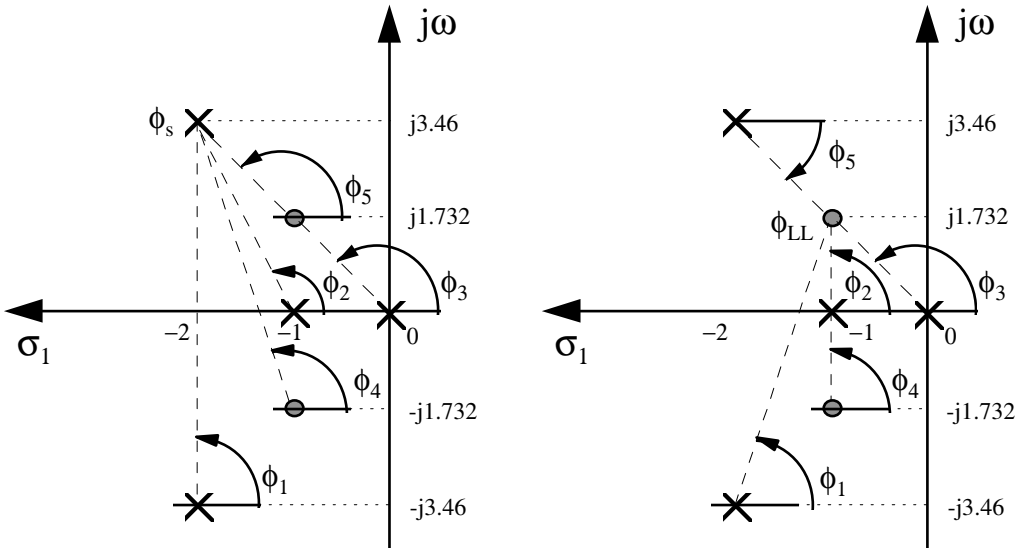
Angulos de llegada ; $\phi_{LL} + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = 180^0\,(2k + 1)$

$$\phi_1 = \tan^{-1} 5.192 = 79^0 \;;\; \phi_2 = 90^0 \;;\; \phi_3 = 180^0 - \tan^{-1} 1.732 = 120^0 \;;\; \phi_4 = 90^0$$

$$\phi_5 = 360^0 - \tan^{-1}\ 1.728 = 300^0$$

Cuando la sumatoria angular sobrepasa por mucho $\pm 180^0$ como en este caso, k puede tomar valores de manera que la diferencia angular no sea tan grande (k = 0,1,2...). Para este problema, es suficiente dar k = 1.

$$\phi_{LL} = 540^0 - 79^0 - 90^0 - 120^0 + 90^0 - 300^0 = -41^0$$



a) b)

Fig.5.9. Cálculo de ángulos de salida y llegada.
a) Angulos de salida. b) Angulos de llegada.

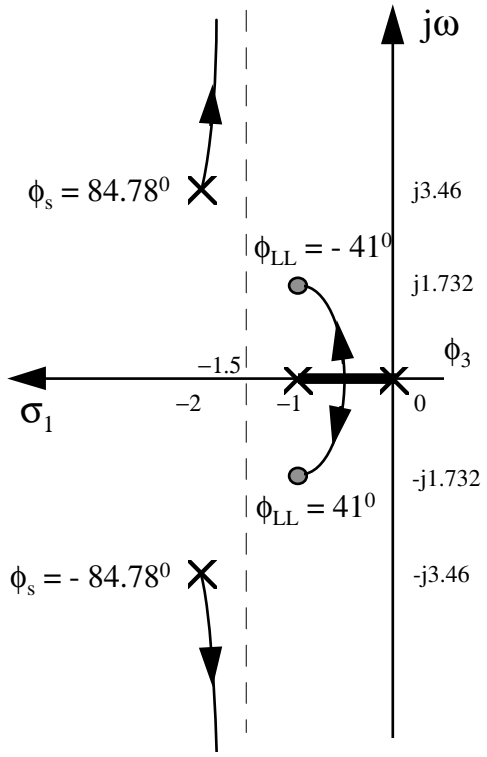


Fig.5.10 Lugar de las raíces de $G(s)H(s) = \dfrac{K(s^2+2s+4)}{s(s+1)(s^2+4s+16)}$.

b) El sistema de control es estable para todo valor de K > 0.

Ejercicios de tarea

1.- Para los siguientes sistemas de control con funciones de transferencia de lazo abierto , determinar :

a) El lugar de las raíces.
b) Rango de estabilidad.
c) Un valor de ganancia K en el lugar de las raíces.

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+4)} \qquad G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2+3s+9)}{s(s^2+5s+25)} \qquad G(s)H(s) = \frac{K(s+8)}{s(s+1)(s+2)}$$